Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde

- Le problème de l'hyperchèvre
- Les limites de la correspondance preuve/programme
- Élections, incohérence et hasard
- Valeurs aux entiers de la fonction zêta
- Coin des problèmes
- Enfin un palindrome parfait ?

Magazine trimestriel n° 49
Juillet–Septembre 2003
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Le problème de l'hyperchèvre

par Jean Jacquelin

Le problème, généralement désigné par « la chèvre », fait partie de ces questions amusantes qui reviennent régulièrement : *Dans un pré circulaire de rayon R, une chèvre est attachée par une corde de longueur L à un pieu planté sur la circonférence du pré. Quel est le rapport L/R tel que la chèvre (supposée ponctuelle !) ne puisse brouter que la moitié de l'aire du pré ?*

La généralisation à l'espace à n dimensions présente évidemment des difficultés de résolution bien plus grandes. Néanmoins, la solution qui a été apportée reste abordable, sans devoir faire appel à un niveau de mathématiques particulièrement élevé.

Les résultats obtenus vont au-delà de ce problème anecdotique. Ils éclairent certains aspects surprenants des espaces à n dimensions. Une conjecture émise récemment, « le rapport L/R tend vers racine carrée de 2 lorsque le nombre de dimensions de l'espace tend vers l'infini », se trouve finalement démontrée.

I Introduction

Qui n'a jamais rencontré, dans quelque recueil de problèmes amusants, celui généralement désigné par « la chèvre » ? Il vient immédiatement à l'esprit de généraliser ce problème dans un espace à n dimensions. La question a été reformulée récemment dans [1] sous une forme quelque peu humoristique :

> « Pour renouveler un peu le genre et passer à l'élevage du futur, je propose
>
> *Le problème de l'hyperchèvre*
>
> Dans un espace à n dimensions, un hyperpaysan possède un champ hypersphérique de rayon R. Il y enferme son hyperchèvre, attachée par une corde de longueur L, dont l'autre extrémité est fixée en un point de l'hypersphère. Chacun sait qu'une hyperchèvre peut se déplacer partout dans les limites de l'hyperespace qui lui est alloué. L'hyperpaysan veut limiter le champ d'action de l'hyperchèvre à la moitié de l'hypervolume de l'hypersphère. Malheureusement son hyperordinateur s'y perd dans les calculs. Ce serait hypersympa de l'aider à trouver le rapport $\rho = L/R$ en fonction de n ... »

À cette question, était adjointe une proposition intrigante [1] :

> « ... Conjecture dite de « l'hyperchèvre » : Lorsque le nombre de dimensions n tend vers l'infini, le rapport L/R tend vers racine de 2. »

La question devient nettement plus intéressante que dans le cas original 2D, du fait qu'elle suscite une réflexion sur les hypersphères, leurs intersections et nécessite le calcul du volume de calottes hypersphériques.

II Cas « classique » 2D

Rappelons brièvement la solution bien connue du problème original de « la chèvre », représenté sur la figure 1.

Il est inutile de revenir sur la démonstration de la formule donnant l'aire d'un segment circulaire. L'aire du segment correspondant à l'angle α et au rayon R vaut

$$R^2(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)).$$

L'aire du segment correspondant à l'angle β et au rayon L vaut

$$L^2(\beta - \sin(\beta)\cos(\beta)).$$

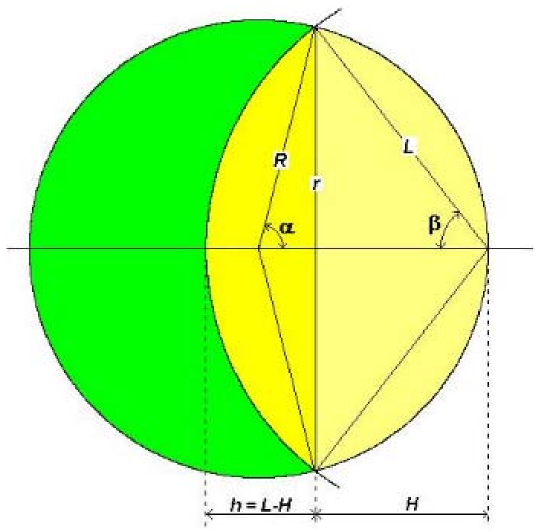


Figure 1.

La somme des aires des deux secteurs est égale à $\pi R^2/2$. En effet,

$$R^2(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) + L^2(\beta - \sin(\beta)\cos(\beta)) = \pi R^2/2.$$

Avec les relations

$$\rho = L/R = \sin(\alpha)/\sin(\beta)$$

et

$$\beta = (\pi - \alpha)/2,$$

et après simplifications, on aboutit à l'équation trigonométrique

$$\sin(\alpha) + (\pi - \alpha)\cos(\alpha) = \pi/2.$$

Cette équation doit être résolue numériquement, ce qui donne $\alpha = 1{,}235\,896\ldots = 70{,}8°$ environ. Le résultat recherché est donc

$$\rho = L/R = 2\,\sin(\alpha/2) = 1{,}158\,728\ldots$$

III Cas 3D

Avec la même figure que précédemment et les mêmes notations, mais en trois dimensions, il s'agit de l'intersection des deux sphères de rayons R et L respectivement. Là encore il est inutile de revenir sur la démonstration de la formule donnant le volume d'une calotte sphérique. Le volume de la calotte correspondant à l'épaisseur H et au rayon R vaut

$$\pi H^2(R - H/3).$$

Le volume de la calotte correspondant à l'épaisseur h et au rayon L vaut

$$\pi h^2(L - h/3).$$

La somme de ces deux volumes doit être égale au demi volume de la sphère, soit $2\pi R^3/3$, d'où

$$\pi H^2(R - H/3) + \pi h^2(L - h/3) = 2\pi R^3/3.$$

Avec les relations $\rho = L/R$ et $H = L^2/2R$, on aboutit à l'équation

$$3\rho^4 - 8\rho^3 + 8 = 0.$$

Le résultat est donc

$$L/R = \rho = 1{,}228\,544\ldots$$

IV Aire et volume de l'hypersphère

Soient $A_n(r) = a_n r^{n-1}$ et $V_n(r) = v_n r^n$ l'aire et le volume d'une hypersphère en fonction de son rayon r dans l'espace à n dimensions. On cherche à exprimer les coefficients a_n et v_n, dépendant de n et qui sont, en fait, l'aire et le volume de l'hypersphère de rayon unité.

Considérons une hypersphère de rayon r variant de 0 à R. Une variation de dr correspond à un volume élémentaire de $A_n \mathrm{d}r = a_n\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r$. L'intégration donne le volume de l'hypersphère de rayon R :

$$V_n = v_n\, R^n = a_n\, R^n/n.$$

Ceci conduit à la relation générale entre aire et volume :

$$v_n = (1/n)a_n$$

et

$$V_n = (R/n)A_n.$$

Par exemple, $A_3 = 4\pi R^2$ et $V_3 = (R/3)A_3 = (4\pi/3)R^3$. La formule est aussi valable pour $n = 2$, en remarquant que, dans l'espace à deux dimensions, $A_2 = 2\pi R$ est la circonférence du cercle et $V_2 = \pi R^2$ est son aire. On a bien $V_2 = (R/2)A_2$. En effet, d'une façon générale A_n correspond à la frontière de l'espace considéré et V_n correspond à son « contenu ». Pour $n = 2$, la frontière est la circonférence et le « contenu » est l'aire du cercle.

La formule donnant a_n peut être établie par récurrence : Considérons l'hypersphère de centre O et de rayon unité. La figure 2 représente une coupe dans les dimensions n et $n - 1$.

Un élément de surface de l'hypersphère est défini par sa « largeur » dα et sa « longueur » qui est égale à l'aire de l'hypersphère de centre O′, de rayon $\sin(\alpha)$

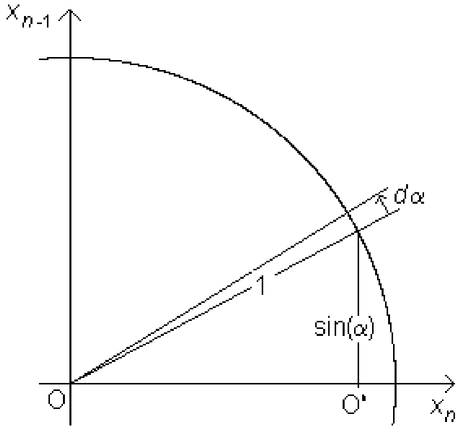


Figure 2.

et de dimension $n-1$, c'est-à-dire $a_{n-1}\sin^{n-2}(\alpha)$. L'intégration de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi$ donne a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}\int_0^{\pi}(\sin(\alpha))^{n-2}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= a_{n-1}\,\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} permet de calculer a_n à partir des valeurs bien connues de l'aire de la sphère de rayon unité $a_3 = 4\pi$ ou de la circonférence du cercle $a_2 = 2\pi$. Le volume de l'hypersphère de rayon unité en découle par $v_n = a_n/n$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_2} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_4}{a_3}\frac{a_3}{a_2} \\ &= \pi^{\frac{n-2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdots\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad v_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

On trouve une autre démonstration dans [2,5], conduisant au même résultat.

Il est intéressant de signaler qu'une formule plus forte est obtenue directement par les intégrales multiples. Un point étant repéré par ses n coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soit $\mathcal{R}$ la région de l'espace définie par

$$\mathcal{R} \equiv \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{p_2} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \leq 1$$
$$\{\text{tous } x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, p_1, p_2, \ldots, p_n > 0\}$$

et l'intégrale multiple

$$I = \iint\cdots\int_{\mathcal{R}} x_1^{h_1-1}x_2^{h_2-1}\ldots x_n^{h_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$$

qui s'écrit explicitement

$$I = \int_0^{a_1} x_1^{h_1-1}\int_0^{a_2\left[1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}\right]^{\frac{1}{p_2}}} x_2^{h_2-1}\ldots$$
$$\int_0^{a_n\left[1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}-\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{p_2}\ldots-\left(\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^{p_{n-1}}\right]^{\frac{1}{p_n}}} x_n^{h_n-1}\,\mathrm{d}x_n\ldots\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1.$$

Le résultat de ces intégrations est, d'après [4] sous sa forme généralisée,

$$I = \frac{a^{h_1}\,a^{h_2}\ldots a^{h_n}}{p_1\,p_2\ldots p_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{h_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{h_2}{p_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{h_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{h_1}{p_1}+\frac{h_2}{p_2}+\frac{h_n}{p_n}\right)}.$$

Dans le cas particulier de l'hypersphère unité, tous les a sont égaux à 1, les p sont égaux à 2 et les h sont égaux à 1. Le résultat en est notablement simplifié :

$$\begin{aligned} I &= \iint\ldots\int_{\mathcal{R}}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$
$$\mathcal{R} \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \leq 1 \quad \{\text{tous } x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\}.$$

L'intégrale I précédente ne porte que sur la région des coordonnées positives. Les x pouvant être soit positifs soit négatifs, il y a 2^n possibilités. On multiplie donc I par 2^n pour obtenir v_n.

Finalement, toutes ces formules sont cohérentes et peuvent être ainsi résumées : si n est pair,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}R^n \\ A_n &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}R^{n-1} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}R^{n-1}\ ; \end{aligned}$$

si n est impair,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}R^n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}2^{n+1}(\frac{n+1}{2})!}{(n+1)!}R^n \\ A_n &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}R^{n-1} = \frac{n\pi^{\frac{n-1}{2}}2^{n+1}(\frac{n+1}{2})!}{(n+1)!}R^{n-1}. \end{aligned}$$

V Volume de l'hypersecteur

Considérons un secteur hypersphérique de rayon R et de demi-angle au sommet α. La méthode de calcul de son volume est la même que celle l'hypersphère au paragraphe précédent, à la différence près qu'il faut limiter l'intégration à α au lieu de π.

$$\begin{aligned} V_{\text{secteur}} &= R^n\frac{a_{n-1}}{n}\int_0^{\alpha}(\sin(\alpha))^{n-2}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= R^n\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\alpha}(\sin(\alpha))^{n-2}\,\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Cette intégrale ne s'exprime pas aussi simplement qu'auparavant. Elle conduit à des séries trigonométriques finies [3]. Les formules sont différentes selon la parité de n. Si n est pair,

$$V_{\text{secteur}} = R^n \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left[\alpha - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!}(\sin(\alpha))^{2j+1}\right];$$

si n est impair,

$$V_{\text{secteur}} = R^n \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^n \left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!}\left[1 - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(\sin(\alpha))^{2j}\right].$$

Pour les dimensions 2 et 3, ces formules se réduisent respectivement aux formules habituelles de l'aire du secteur circulaire et du volume du secteur sphérique :

$$\text{si } n = 2,\ V = \alpha R^2;$$
$$\text{si } n = 3,\ V = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos(\alpha))R^3 = \frac{2\pi}{3}R^2 H.$$

VI Volume de l'hypercône

Dans un espace à n dimensions, considérons un hypercône de révolution de sommet O et ayant pour axe l'axe de la n-ième dimension. Sa hauteur est $\mathrm{OO}' = h$ et son demi-angle au sommet est α. Sa base, qui est dans l'espace des $n-1$ autres dimensions, est l'hypersphère de centre O′ et de rayon $r = h\,\mathrm{tg}(\alpha)$. La figure 3 représente une coupe dans les dimensions n et $n-1$.

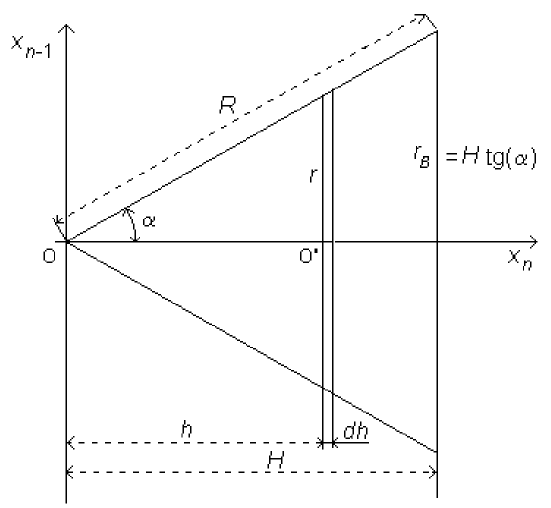


Figure 3.

L'aire de la base du cône de hauteur h est égale au volume de l'hypersphère de rayon r et de dimension $n-1$, soit $\upsilon_{n-1}r^{n-1}$. Si l'on fait varier la hauteur de dh, le volume élémentaire engendré est

$$\mathrm{d}V = \upsilon_{n-1}r^{n-1}\mathrm{d}h = \upsilon_{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}(\alpha)h^{n-1}\mathrm{d}h.$$

En intégrant de $h = 0$ à $h = H$, on trouve le volume $V_{\text{cône}}$ de l'hypercône de hauteur H et dont le rayon de base est $r_B = H\,\mathrm{tg}(\alpha) = R\sin(\alpha)$:

$$\begin{aligned} V_{\text{cône}} &= \upsilon_{n-1}\,(\mathrm{tg}(\alpha))^{n-1}\int_0^H h^{n-1}\,\mathrm{d}h \\ &= \upsilon_{n-1}\,(\mathrm{tg}(\alpha))^{n-1}\frac{H^n}{n} \\ V_{\text{cône}} &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}R^n\cos(\alpha)\sin^{n-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Remarque. La notation H n'a pas la même signification que dans les paragraphes précédents, ce qui apparaît clairement sur les figures respectives. Si n est pair,

$$V_{\text{cône}} = \frac{2^{n-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{n!}R^n\cos(\alpha)\sin^{n-1}(\alpha)\ ;$$

si n est impair,

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)!}R^n\cos(\alpha)\sin^{n-1}(\alpha).$$

VII Volume de calotte hypersphérique

Il s'agit d'un secteur de rayon R et de demi-angle au sommet α, dont on soustrait le cône pour ne conserver que la calotte. Les formules du volume en résultent immédiatement. En fait, on constate que le terme provenant de la formule du cône constitue un terme supplémentaire qui complète la série : la formule est identique à celle du secteur, excepté le nombre figurant au-dessus du signe sigma. Si n est pair,

$$V_{\text{calotte}} = R^n \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left[\alpha - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!}(\sin(\alpha))^{2j+1}\right];$$

si n est impair,

$$V_{\text{calotte}} = R^n \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^n \left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!}\left[1 - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(\sin(\alpha))^{2j}\right].$$

VIII Retour au problème de l'hyperchèvre

La figure 1 (section II), représente aussi une coupe dans les dimensions n et $n-1$ de l'hypersphère de rayon R (volume V_n) et de son intersection avec l'hypersphère de rayon L. Le volume commun est constitué de deux calottes hypersphériques dont les demi-angles sont α et β respectivement. On peut maintenant calculer leur volume, V_α et V_β, et faire leur somme qui doit être égale à $V_n/2$.

Pour plus de généralité, on va exprimer le rapport $\tau = (V_\alpha + V_\beta)/V_n$, en tenant compte des relations suivantes :

$$\beta = (\pi - \alpha)/2, \text{ donc } \sin(\beta) = \cos(\alpha/2)$$
$$\text{et } \cos(\beta) = \sin(\alpha/2)$$
$$\rho = \frac{L}{R} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Grâce à ces relations, τ peut être mis sous la forme d'une fonction de la seule variable α. Si n est pair,

$$\tau = \frac{1}{\pi}\left\{\alpha - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!}(\sin(\alpha))^{2j+1} + 2^n \sin^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times\left[\frac{\pi-\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!}\cos^{2j+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} ;$$

si n est impair,

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos(\alpha)\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}\sin^{2j}(\alpha) +2^n \sin^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}\cos^{2j}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}.$$

Dans le cas où n est impair, α n'apparaît pas directement, mais seulement dans des rapports trigonométriques. Il est donc possible, dans ce cas, de passer à une équation algébrique en ρ, grâce à la relation $\sin(\alpha/2) = \rho/2$. Toutefois, l'équation algébrique à laquelle on aboutit étant de degré élevé, on est toujours conduit à des calculs numériques, que ce soit en utilisant la forme trigonométrique ou la forme algébrique.

En faisant varier le paramètre α, on peut tracer le réseau de courbes représentant τ en fonction de ρ pour diverses valeurs de n (voir figure 4).

Plus spécifiquement, en ce qui concerne le problème de l'hyperchèvre, on recherche la valeur de ρ pour $\tau = 1/2$. Les résultats, en fonction de n, sont listés dans le tableau 1.

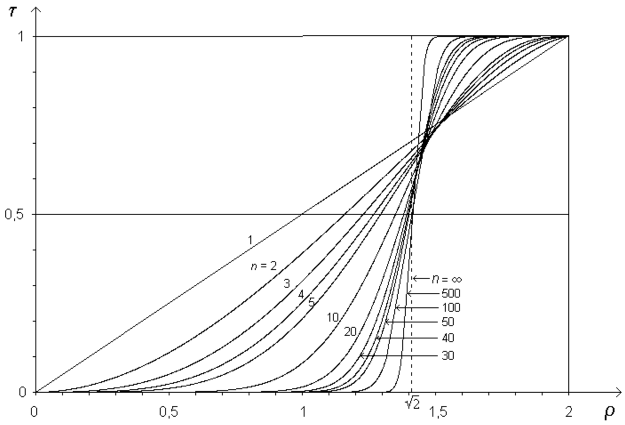


Figure 4.

Tableau I.

$\tau = 1/2$		
n	$\rho = L/R$	α
1	1,000 000	
2	1,158 728	1,235 896
3	1,228 544	1,322 927
4	1,268 079	1,373 531
5	1,293 597	1,406 759
6	1,311 461	1,430 300
7	1,324 679	1,447 875
8	1,334 862	1,461 507
9	1,342 951	1,472 397
10	1,349 535	1,481 299
15	1,369 931	1,509 113
20	1,380 525	1,523 704
30	1,391 414	1,538 808
40	1,396 979	1,546 569
50	1,400 359	1,551 298

IX La conjecture « de l'hyperchèvre »

Il avait été conjecturé [1] que la limite de L/R est $\sqrt{2}$ lorsque le nombre de dimensions tend vers l'infini. D'après les résultats numériques précédents, il semble bien que, lorsque n augmente, α tende vers $\pi/2 = 1{,}570\,796\ldots$ et ρ vers $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\ldots$ Mais encore faut-il le démontrer.

Partons des séries infinies suivantes qui sont bien connues :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}x^{2j}$$
$$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!}x^{2j+1}.$$

En remplaçant x par $\sin(\alpha)$ ou par $\cos(\alpha/2)$, on obtient respectivement, pour $0 < \alpha < \pi/2$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} \sin^{2j}(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} \cos^{2j+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} \sin^{2j+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\cos(\alpha)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} \cos^{2j+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi-\alpha}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Pour $\pi/2 < \alpha < \pi$, les formules sont les mêmes en remplaçant α par $\pi - \alpha$. En reportant ces séries infinies dans les expressions de $\tau(\alpha)$ et en simplifiant, on obtient, pour $0 < \alpha < \pi/2$,

$$\tau = \frac{1}{\pi}\left\{\cos(\alpha) \sum_{j=\frac{n}{2}}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} \sin^{2j+1}(\alpha) + 2^n \sin^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=\frac{n}{2}}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j+1)!} \cos^{2j+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

si n est pair et

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha) \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} \sin^{2j}(\alpha) + 2^n \sin^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} \cos^{2j}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

si n est impair.

Dans le cas où $\pi/2 < \alpha < \pi$, les formules deviennent : $\tau = 1 + \tau_{\text{formules précédentes}}$. Par rapport au cas précédent, $\cos(\alpha)$ est négatif, alors que $\cos(\alpha/2)$ reste positif. Ceci montre qu'il n'y a pas de symétrie au point médian ($\alpha = \pi/2, \tau = 1/2$) de chaque courbe, sauf si la seconde somme est négligeable par rapport à la première (ce qui tend à se produire lorsque n devient grand). Lorsque n tend vers l'infini, chacune de ces sommes tend individuellement vers 0. Par contre, il est possible que le terme $2^n \sin^{n+1}(\alpha/2)$ tende vers l'infini. Il faut donc étudier les limites pour n tendant vers l'infini dans chaque cas. Pour les cas $\alpha = 0$ ou $\pi/2$ ou π, on doit nécessairement remonter aux formules de la section VIII, car les séries infinies ne sont plus applicables. En utilisant la notation N au lieu de n pour rappeler que l'on se place dans les cas de dimensions élevées, le développement en puissances de $1/N$ donne les termes principaux suivants :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} : \quad \tau_{(N)} \simeq \frac{1}{\pi^{1/2}\cos(\alpha)(1-\cos(\alpha))} \times \left[\frac{\sin^{N+1}(\alpha)}{N^{1/2}} + \dots\right]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \tau \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}N^{1/2}} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi : \quad \tau \simeq 1 - \tau_{(N)}.$$

Lorsque $\alpha = \pi/2$, on a $\rho = 2\sin(\alpha/2) = \sqrt{2}$. Pour N tendant vers l'infini, si $0 < \rho < \sqrt{2}$, τ tend vers 0, si $\rho = \sqrt{2}$, τ tend vers 1/2 et si $\sqrt{2} < \rho < 2$, τ tend vers 1. En résumé, pour N infini, $\tau(\rho) = \mathrm{H}\left(\rho - \sqrt{2}\right)$ où H est la fonction d'Heaviside. La conjecture de L/R tendant vers $\sqrt{2}$ se trouve ainsi démontrée.

X Conclusion

Les résultats obtenus ont été au-delà du problème anecdotique de « la chèvre ». Ils éclairent certains aspects surprenants des espaces à n dimensions.

L'une des propriétés qui peut paraître paradoxale de l'hypersphère de rayon unité est que son volume tend rapidement vers zéro lorsque son nombre de dimensions croît indéfiniment, ce qui est bien connu [5].

Les propriétés d'une calotte hypersphérique apparaissent encore plus surprenantes : son volume tend encore plus rapidement vers zéro que celui de l'hypersphère de même rayon, si son angle α est inférieur à $\pi/2$. Au contraire, son volume devient très proche de celui de l'hypersphère complète dès que son angle α est supérieur à $\pi/2$. Pour $\alpha = \pi/2$, le rapport des volumes est 1/2 exactement, quel que soit n.

Ceci permet de confirmer la conjecture proposée dans [1] et explique ce résultat apparemment paradoxal : lorsque n est grand, pour un rapport des rayons $L/R = \sqrt{2}$, la calotte correspondant à l'hypersphère de rayon L a un volume quasi nul par rapport à celui de la calotte correspondant à l'hypersphère de rayon R et qui occupe à elle seule la moitié du volume total.

Remerciements. Je remercie particulièrement Monsieur François Lo Jacomo pour ses commentaires très constructifs. Sa proposition intéressante d'utiliser une généralisation aux nombres non entiers de la notation factorielle permettrait, en effet, d'alléger notablement l'exposé, en supprimant la distinction entre les cas n pair et n impair. L'obtention des limites pour n tendant vers l'infini serait également facilitée en étendant la formule de Stirling aux nombres non entiers. En contrepartie, les diverses identités remarquables et les formules des coefficients binomiaux ne sont pas traditionnelles actuellement pour des nombres non entiers.

Selon un autre point de vue, la fonction Gamma pourrait rendre le même service d'une façon également simple si l'on en restait aux résultats uniquement exprimés avec cette fonction. Mais l'usage de la fonction Gamma est moins courant, ce qui incite à revenir en permanence à la notation factorielle, d'une façon parfois redondante, comme on le ressent dans la présentation qui en a été faite.

Références

[1] `http://www.ifrance.com/maths-express/forum.htm`, Question d'Antony, « Maths et agriculture », 2002-07-11 ; Reponse : JJ, 2002-07-12.

[2] I. Peterson, *The Mathematical Tourist : Snapshots of Modern Mathematics*, Freeman, 1988, pp. 96–101.

[3] R.C. Weast, « Integrals n° 300 & 301 », *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 65th. Ed., CRC Press, 1985, p. (A-39).

[4] R.C. Weast, « Definite integrals n° 658 », *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 65th. Ed., CRC Press, 1985, p. (A-61).

[5] E.W. Weisstein, « Hypersphere », *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, 1999, pp. 876–878.

QUADRATURE
Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

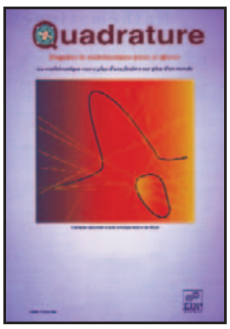
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT
Quadrature

❒ Mme ❒ Mlle ❒ M.

Nom . . . .
Prénom . . . .
Profession . . . .
Institution . . . .
. . . .
Adresse . . . .
. . . .
. . . .
Code Postal . . . .
Ville . . . .
Pays . . . .
e-mail . . . .

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❒ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . .31,50 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . .36,75 €

❒ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . .57,50 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . .68,25 €

Paiement :

❒ Envoyez-moi une facture proforma
❒ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)
❒ Carte de Crédit :
❒ Visa ❒ Eurocard ❒ American Express
Carte No . . . .
Date de validité . . . .
date/signature

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement
17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org