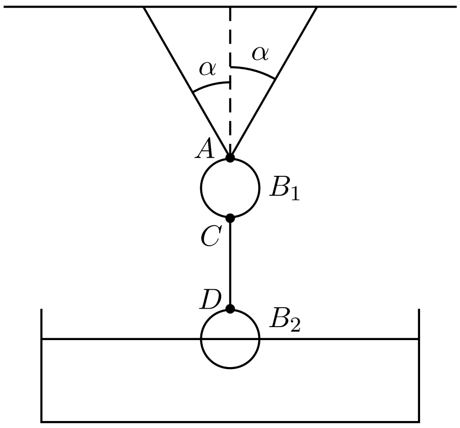
# Exercices sur les forces et le principe d'inertie

## 1 Équilibre d'un système constitué de deux boules

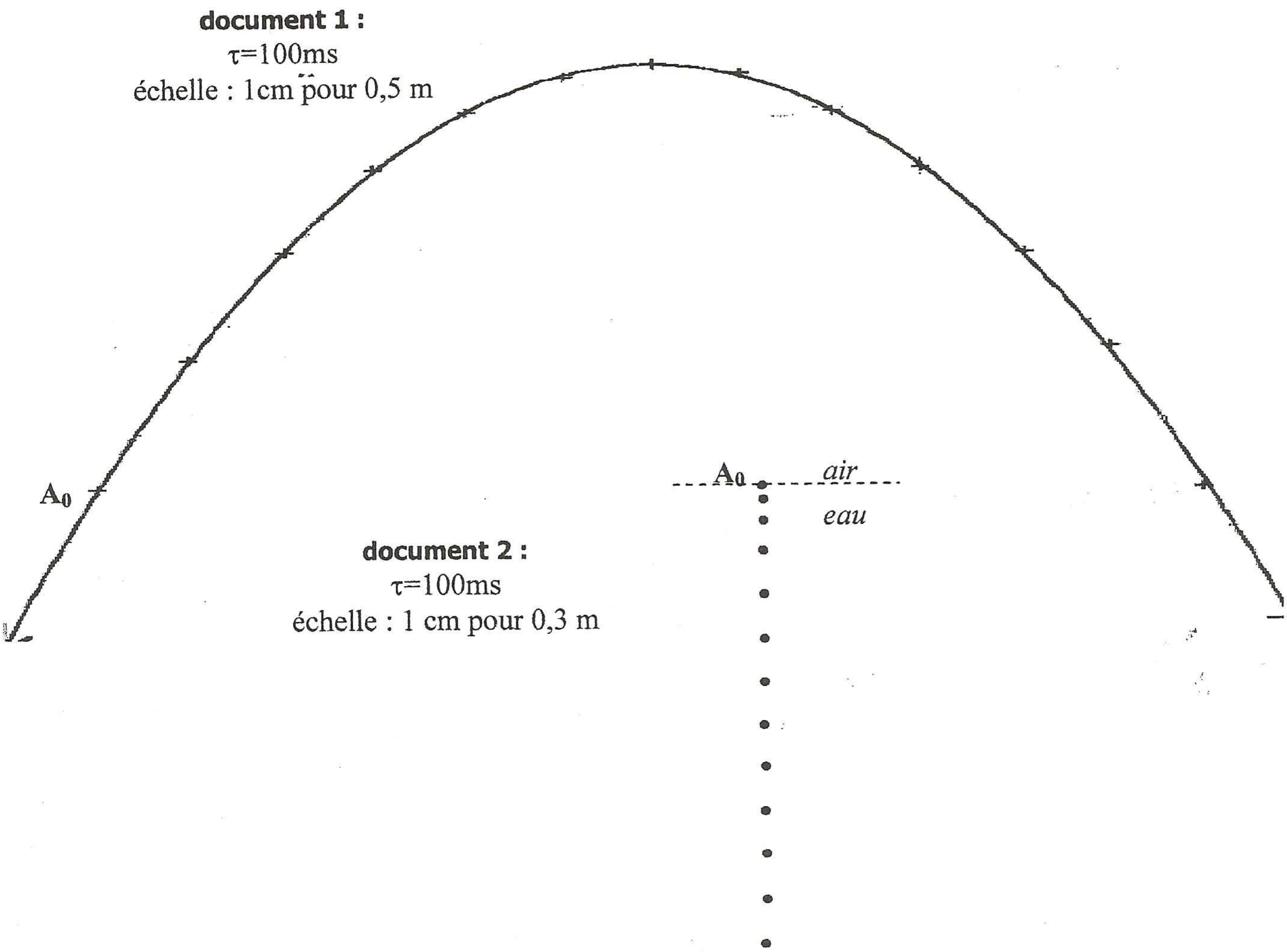
Dans le dispositif représenté ci-dessous, plusieurs éléments sont attachés à un support horizontal. Deux fils de même longueur de masses négligeables sont attachés en $A$ à une boule $B_1$, de masse $m_1 = 600$ g et de centre d'inertie $G_1$. Sur un point $C$ de la boule $B_1$, on attache un fil de masse négligeable, et à l'autre extrémité de ce fil, notée $D$, on attache une boule $B_2$, de masse $m_2 = 800$ g, de rayon $r = 60,0$ mm et de centre d'inertie $G_2$.
Lorsque l'ensemble est en équilibre, la boule $B_2$ est à moitié immergée dans un liquide de masse volumique notée $\rho_L$. On néglige l'action de l'air devant les autres actions mécaniques.
*Données :* volume d'une sphère $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ; l'angle $\alpha$ vaut 30° et $g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.




1. (a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur $B_2$. Les représenter en rouge, sans souci d'échelles, sur le schéma.
   (b) Donner l'expression littérale du poids $P_2$ et de la poussée d'Archimède notée $F_A$.
   (c) Écrire la relation vectorielle entre les différents vecteurs forces. En déduire une relation algébrique entre la tension $T$ exercée par le fil $CD$ sur $B_2$, $P_2$ et $F_A$.
   (d) En déduire la valeur de $\rho_L$ sachant que la tension $T$ exercée par le fil $CD$ sur $B_2$ vaut 3,8 N. Ce liquide est-il de l'eau ? Justifier.
2. (a) En considérant le système $\{$fil $CD\}$, trouver la force exercée par la boule $B_1$ sur le fil ; en déduire la force (direction, sens, valeur) exercée en $C$ par le fil sur la boule $B_1$.
   (b) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la boule $B_1$. Les représenter en vert sur le schéma.
   (c) Écrire la relation vectorielle existant entre les vecteurs forces.
   (d) En déduire deux relations algébriques entre les normes de ces différents vecteurs et l'angle $\alpha$.
   (e) Calculer la tension des fils soutenant la boule $B_1$.

## 2 Au bord de la piscine

Alain et Jacques se lancent une bille d'acier de 5 cm de diamètre de part et d'autre d'une piscine. La trajectoire du centre de gravité de la bille, dans l'air, est reproduite dans le document 1. Au cours d'un lancer, Jacques laisse échapper la bille, qui tombe alors dans l'eau. La trajectoire de la bille, dans l'eau, est reproduite dans le document 2. On ne néglige pas les forces de frottement. *(données en fin d'énoncé)*




1. (a) Quel est le référentiel d'étude ?
   (b) Tracer le vecteur vitesse de la bille aux points $A_3$ et $A_8$ pour chaque document, en précisant l'échelle de vitesse utilisée.
2. Que peut-on dire du mouvement du centre de gravité de la bille dans chacun des cas ?
3. (a) Dans les deux cas, faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille et les représenter à un instant quelconque.
   (b) Dans le cas du document 2 (bille est en mouvement dans l'eau), calculer les forces qui s'exercent sur la bille quand elle est en $A_8$ et en déduire la valeur du coefficient de frottement $k$.
   *Rappel du principe d'inertie : Tout corps soumis à des forces qui se compensent persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme et inversement.*
4. La bille étant au fond de l'eau, Alain décide de la remplacer par une boule en bois de rayon $r = 20$ cm.
   (a) Cette boule peut-elle flotter à la surface de l'eau ?
   (b) Si oui, quelle est la fraction du volume immergé ?

*Données :*
$g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.
masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, masse volumique de l'acier : $\rho_a = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, masse volumique du bois $\rho_b = 700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
La force de frottement due à un objet en mouvement dans un fluide (gaz ou liquide) est de la forme $f = kv$ où $k$ (en $\mathrm{Ns \cdot m^{-1}}$) est une constante qui dépend du fluide et $v$ la vitesse de l'objet.

## 3 Mouvement d'un skieur

Un skieur de masse $m = 61$ kg descend une piste enneigée rectiligne faisant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. Le skieur, assimilable à un solide, descend la piste à vitesse constante. On néglige les frottements de la neige sur les skis et la poussée d'Archimède exercée par l'air devant les autres forces. Les frottements de l'air peuvent être modélisés par une force parallèle à la pente, opposée au mouvement et dont la valeur augmente avec la vitesse.

1. Préciser le système étudié et le référentiel.
2. Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur le skieur et les représenter sans souci d'échelle.
3. Déterminer, par le calcul, les valeurs de toutes les forces qui s'exercent sur le skieur.

## 4 Utiliser la poussée d'Archimède

Un iceberg de densité $d_1 = 0,92$ flotte sur l'eau de mer de densité $d_2 = 1,03$.

1. Nommer les actions mécaniques qui s'exercent sur l'iceberg.
2. Faire l'inventaire des forces extérieures s'exerçant sur l'iceberg.
3. Représenter ces forces sur un schéma.
4. Écrire la condition d'équilibre de l'iceberg.
5. Calculer, en fonction du volume $V$ de l'iceberg, le volume $V_1$ de sa partie visible et le volume $V_2$ de sa partie immergée.

## 5 Équilibre d'un surfeur

Un surfeur glisse sur une pente inclinée d'un angle $\alpha$ de 25° par rapport à l'horizontale suivant une trajectoire rectiligne. La masse du système {surfeur + surf}, assimilable à un solide, est $M = 70$ kg. On rappelle que $g = 9,8\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.
En position de recherche de vitesse, le surfeur a atteint une vitesse constante de $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. On évalue la force de résistance de l'air à une force de 150 N de même direction que le vecteur vitesse mais de sens opposé.

1. Faire l'inventaire des forces appliquées au système, préciser leurs caractéristiques.
2. Caractériser le mouvement du surfeur dans le référentiel terrestre, galiléen, une fois atteinte la vitesse de $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Quelle distance parcourt-il en 30 s ?
3. Quelle est la relation vérifiée par les forces appliquées au système ? Bien justifier.
4. Par une résolution graphique, déterminer la force de frottements du surf sur la piste.
5. Retrouver ce résultat par le calcul.

## 6 Voiture montant une pente

On considère une automobile de masse $m = 1,50$ tonne ; elle monte avec une vitesse constante une pente faisant un angle $\alpha = 30,0°$ avec l'horizontale. On prendra $g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'automobile. Quelle relation peut-on écrire entre ces forces ? Justifier.
2. On note $\vec{R}$ la somme géométrique des forces exercées par le sol sur les quatre roues. On pose $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ avec $\vec{T}$ parallèle à la route et $\vec{N}$ perpendiculaire à la route. Représenter, à l'échelle, les différentes forces s'exerçant sur la voiture.
3. Déterminer graphiquement les valeurs de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ .
4. Calculer les valeurs de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ .

## 7 Interaction avec un pèse-personne

Antoine, muni d'un bâton, monte sur un pèse-personne. L'appareil indique 78 kg.

1. Il appuie avec son bâton sur le plafond, l'appareil indique 92 kg. On considérera le système {Antoine+bâton} comme un solide à l'équilibre, le bâton ayant une masse négligeable.
   (a) Effectuer le bilan des forces exercées sur Antoine et son bâton.
   (b) Représenter ces forces sur un schéma sans souci d'échelle.
   (c) Quelle est la force mesurée par le pèse-personne ?
2. (a) Expliquer pourquoi la balance donne une indication supérieure lorsque Antoine pousse sur le plafond avec son bâton.
   (b) Calculer la valeur de cette force de poussée sur le plafond.

On prendra $g = 9,8\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

## 8 Voiture dans une côte

Une voiture dont la valeur du poids est $P = 8000$ N roule à une vitesse constante de valeur $v = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ sur une route rectiligne et horizontale.
L'ensemble des frottements (air sur la carrosserie et sol sur certains pneus) est modélisable par une force opposée au mouvement et de valeur égale au dixième de celle du poids.

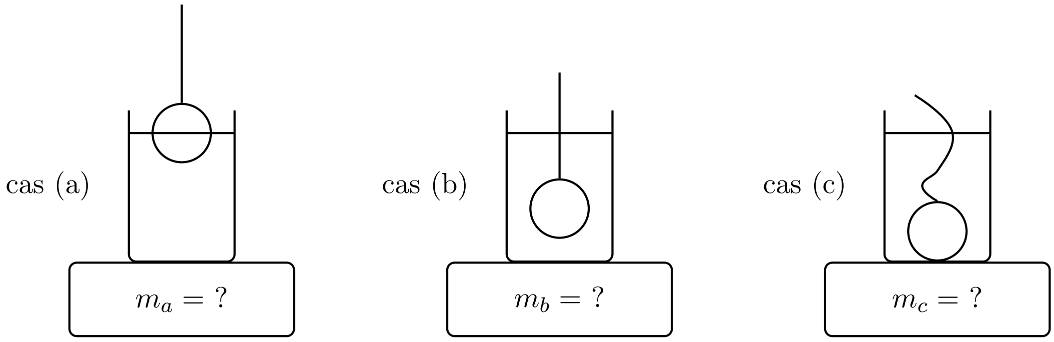
1. Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur le véhicule et trouver les caractéristiques de toutes les forces.
2. Le véhicule aborde maintenant une côte à 10% (une côte à 10% est telle que le véhicule s'élève de 10 m pour 100 m de parcours). Quelle doit être la valeur de la nouvelle force motrice pour que la vitesse reste constante, en supposant que les frottements soient inchangés ?

## 9 Allongement de ressorts

Deux ressorts de même longueur à vide $L_0 = 10$ cm mais de raideurs différentes sont accrochés bout à bout puis l'ensemble est étiré jusqu'à mesurer 30 cm. Quelle est alors la longueur de chacun des ressorts ?
Raideurs des ressorts : $k_1 = 100\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $k_2 = 25\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

## 10 Jeu de balance

Un bécher rempli d'eau est posé sur le plateau d'une balance puis l'affichage est remis à zéro par pression sur le bouton « tare ». L'affichage de la balance donne le rapport $\frac{F}{g}$ où $\vec{F}$ est la force exercée sur le système {bécher+plateau+eau}.
Une boule de masse $m = 200$ g et de volume $V = 100$ cm$^3$, suspendue à un fil est plongée dans l'eau.
On envisage les trois cas suivant :
– la boule est à moitié immergée (a)
– la boule est entièrement immergée (b)
– et la boule est posée au fond du bécher(c).




Pour chacun des cas :

1. Donner les caractéristiques de toutes les forces exercées sur la boule.
2. En déduire la valeur de la force exercée par la boule sur le système {bécher+plateau+eau}.
3. Indiquer la valeur de la masse affichée sur la balance.

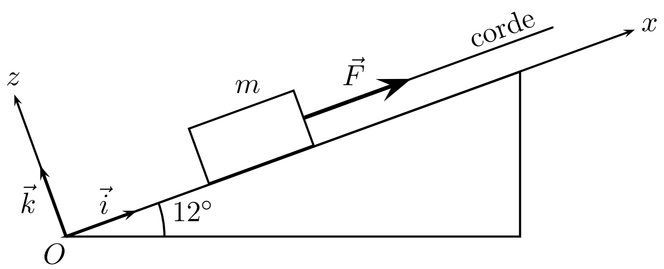
*Données :*
Intensité de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$
Masse volumique de l'eau $\rho = 1,0\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

# Exercices sur la deuxième loi de Newton

*Pour tous les exercices et sauf indication contraire, on prendra* $g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

## 11 Plan incliné

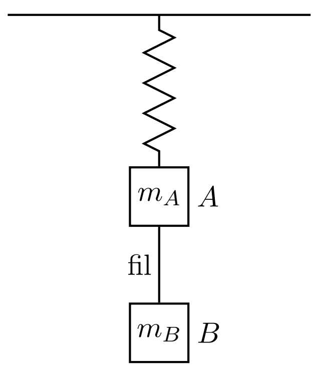
Un bloc de masse $m = 80,0$ kg repose sur un plan incliné d'un angle de 12,0° par rapport à l'horizontale. Une corde actionnée par un moteur exerce sur le bloc une force de valeur constante $F$. On se propose de déterminer $F$ pour que le bloc soit hissé avec une accélération de valeur constante $a = 2,00\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On suppose qu'au cours du déplacement, la valeur de la composante tangentielle de la force $\vec{R}$ exercée par le sol sur le bloc est égale à 0,25 fois la valeur de sa composante normale.




1. Reproduire le schéma et représenter qualitativement les forces agissant sur le bloc.
2. Calculer la valeur $R_z$ de la composante de $R$ selon le vecteur $\vec{k}$. En déduire celle $R_x$ de sa composante selon le vecteur $\vec{i}$.
3. Calculer $F$.

## 12 Masses suspendues

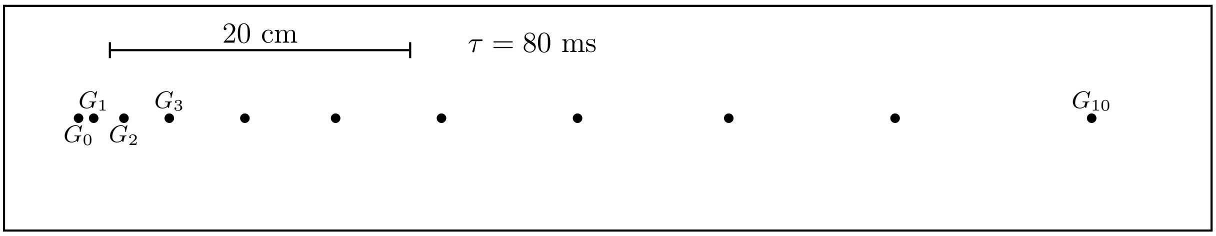
Deux solides $A$ et $B$, de masses $m_a = 200$ g et $m_b = 100$ g, sont reliés par un fil et suspendus à un ressort. L'ensemble est immobile.




1. (a) Représenter les vecteurs suivants et calculer leur valeur : $\vec{F}_{fil/B}$, $\vec{F}_{fil/A}$, $\vec{F}_{ressort/A}$.
   (b) La raideur du ressort est $k = 30\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Calculer son allongement.
2. On coupe le fil. Déterminer le vecteur accélération du centre d'inertie de $A$ immédiatement après.

## 13 Palet sur une table inclinée

Un palet de masse $m = 270$ g est posé sur une table à coussin d'air inclinée par rapport l'horizontale. On lâche le palet sans vitesse tout en déclenchant l'enregistrement de son mouvement. La figure ci-dessous reproduit les positions successives $G_i$ de son centre d'inertie $G$ aux différentes dates $t_i$, séparées par une durée constante $\tau = 80$ ms.




1. Le mouvement de $G$ est-il rectiligne ? rectiligne uniforme ?
2. Calculer la valeur $a_i$ de l'accélération aux dates $t_i$ pour les valeurs de $i$ comprises entre 2 (inclus) et 8 (inclus).
3. Que peut-on dire de la somme vectorielle des forces s'exerçant sur le palet ? Quelle est la direction de ce vecteur ? Quel est son sens ? Quelle est sa valeur $F$ ?

## 14 Accélération d'une voiture

Un constructeur indique pour l'un de ses modèles de voiture la performance suivante :
« Poids : 1300 kg ; accélération de 0 à 100 km/h : 12,5 s ».

1. Reformuler le texte à l'aide d'une définition correcte de chacune des grandeurs utilisées.
2. Calculer la valeur $a$, supposée constante, du vecteur accélération de la voiture.
3. Calculer la somme $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur la voiture, la route étant supposée horizontale. Représenter ce vecteur.
4. On considère la même voiture mais chargée : sa masse est de 1500 kg. Calculer la durée nécessaire dans ces conditions pour atteindre les 100 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, en faisant l'hypothèse que la valeur de $\vec{F}$ est la même qu'auparavant.

## 15 Décélération d'une F1

Une formule 1 roule à la vitesse $v_1 = 250\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le pilote lève brusquement le pied de l'accélérateur : la voiture décélère. La valeur du vecteur accélération est de l'odre de 10 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Calculer la valeur du vecteur vitesse $\vec{v_2}$ du centre d'inertie de la voiture 2 s après le début de la phase de décélération.
2. La masse de la voiture est de 720 kg. Calculer la somme $\vec{F}$ des forces appliquées à la voiture.
3. Sans tenir compte de l'échelle, représenter qualitativement le vecteur vitesse, le vecteur accélération et le vecteur $\vec{F}$ pendant la phase de décélération.

## 16 Réception d'un saut

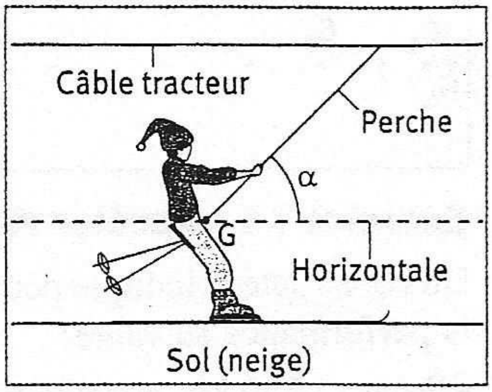
Une personne de masse $m = 80$ kg saute d'un muret. Dès que ses pieds touchent le sol, elle plie les jambes pour amortir la chute. À la date, choisie comme origine, où elle touche le sol, la vitesse de son centre d'inertie $G$ est verticale de valeur $v_{G_0} = 4,4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse de $G$

s'annule à la date $t_1$ : la phase de réception est terminée et a duré 0,70 s.
Soit $\vec{R}$ la force exercée par le sol sur le sauteur pendant la réception du saut : on la supposera constante dans toute cette phase.

1. Représenter $\vec{R}$
2. Justifier que $\vec{a}_G$ est constante entre les dates 0 et $t_1$.
3. Calculer sa coordonnée $a_z$ sur un axe vertical ascendant.
4. Calculer la valeur $R$ de $\vec{R}$.
5. Exprimer la force $\vec{F}$ exercée par le sauteur sur le sol pendant la réception du saut.

## 17 Étude du mouvement d'un skieur

Cet exercice étudie un modèle très simplifié du mouvement du centre d'inertie $G$ d'un skieur dans différentes phases. Le skieur est considéré comme un solide en translation dont la masse totale, avec l'équipement, est $m = 80,0$ kg.
On assimilera l'ensemb1e des forces de frottement à une force unique opposée au mouvement, de valeur constante $F = 50$ N. Le skieur reste constamment en contact avec le sol.
*Donnée :* Record du monde de vitesse à ski : 250,7 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
On prendra $g = 9,81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.




1. **Montée**
   (a) Le skieur se présente sur l'aire de départ, horizontale, du téleski. Initialement immobile, il s'accroche à une perche faisant un angle $\alpha$ constant de 45° avec l'horizontale.
   On admettra que la perche exerce une force de traction $\vec{T}$ dirigée selon sa propre direction.
   Après un parcours d'une durée $\Delta t = 8,0$ s, la vitesse se stabilise à la valeur $v = 2,0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
      i. Faire l'inventaire de toutes les forces s'exerçant sur le skieur pendant cette phase de démarrage : on appellera $\vec{N}$ la composante normale de l'action de la piste sur les skis. Les représenter sur un schéma.
      ii. On suppose l'accélération du skieur constante. Calculer sa valeur.
      iii. Exprimer sous forme vectorielle la deuxième loi de Newton.
      iv. Déterminer l'expression littérale puis la valeur $T$ de la force de traction $\vec{T}$.
   (b) Le skieur, toujours tiré par la perche, monte à la vitesse constante $v = 2,0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sur une pente inclinée de $\beta = 40°$ par rapport à l'horizontale. La perche elle-même forme un angle $\delta = 30°$ avec le sol.
   Après avoir schématisé le skieur, déterminer littéralement puis numériquement la nouvelle valeur de $T$.

(c) Le skieur arrive au sommet, avec la vitesse précédente, sur une plate-forme horizontale où il lâche la perche. Combien de temps mettra-t-il pour s'arrêter ?

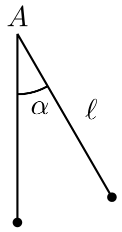
2. **Descente**
   Lors d'une compétition, le skieur s'élance à partir d'une position de repos sur une piste rectiligne, inclinée d'un angle $\beta' = 28°$ par rapport à l'horizontale.
   (a) En admettant l'existence de forces de frottement de même valeur qu'à la montée, quelle vitesse atteindra-t-il après 10 s ?
   (b) La valeur des forces de frottement varie en réalité avec la vitesse selon la loi $F = kv^2$ avec un coefficient $k = 0,33$ SI.
      i. Déterminer l'unité de $k$.
      ii. Si l'accélération du skieur pouvait s'annuler, pour quelle vitesse cela se produirait-il ? On suppose que cette vitesse est la vitesse limite, constante, vers laquelle tend celle du skieur au bout d'un temps très long. Peut-il espérer battre le record du monde sur cette piste ?

## 18 Ascenseur (MR Bordeaux 2004)

Un solide de masse $m = 200$ g est suspendu au plafond d'un ascenseur par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur $K = 20$ N $\cdot$ m$^{-1}$.
L'ascenseur démarre (à $t_0 = 0$) et descend avec un mouvement uniformément accéléré. Il atteint une vitesse de 3 m $\cdot$ s$^{-1}$ après 4 secondes de descente.
On prendra : $g = 10$ m $\cdot$ s$^{-2}$.
Calculer, à cet instant, l'allongement subi par le ressort, par rapport à sa longueur à vide $\ell_0$.

## 19 Pendule vertical

Un pendule simple est constitué d'une bille de masse $m$, qui peut être considérée comme ponctuelle, attachée à l'une de ses extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell$. L'autre extrémité du fil est attachée en point fixe $A$.
Écarté de sa position d'équilibre, un pendule oscille de part et d'autre de cette position.
On repère la position du pendule par l'élongation angulaire $\alpha$, mesurée à partir de la position d'équilibre. *L'intensité de la pesanteur est désignée par g.*




1. On considère un pendule écarté de sa position d'équilibre.
   En faisant le bilan des forces s'exerçant sur la bille et en utilisant une loi de la mécanique, que vous préciserez, montrer qu'une telle position ne peut pas être une position d'équilibre.
2. Des élèves s'interrogent sur la période $T$ des oscillations du pendule et sur la valeur $v_e$ de la vitesse de la bille au passage par la position d'équilibre.
   Les propositions suivantes sont faites :

$$(A) \quad T = 2\pi\frac{\ell}{g} \qquad (B) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (C) \quad T = 2\pi\frac{\ell}{mg}$$

$$(A') \quad v_e = kg\ell \qquad (B') \quad v_e = k\sqrt{g\ell} \qquad (C') \quad v_e = k\sqrt{mg\ell}$$

où $k$ est un nombre sans dimension.
Par analyse dimensionnelle, déterminer quelles sont les expressions qui peuvent convenir.

3. Pour valider les résultats obtenus, les élèves construisent 4 pendules différents. Les pendules sont écartés de $\alpha_m = 5°$ de la position d'équilibre et libérés sans vitesse. Les mouvements sont filmés et l'analyse des documents vidéo permet de trouver $T$ et $v_e$ pour chacun des pendules. Les mesures sont regroupées dans le tableau suivant :

| | pendule n°1 | pendule n°2 | pendule n°3 | pendule n°4 |
|---|---|---|---|---|
| $m$ (g) | 100 | 100 | 200 | 200 |
| $\ell$ (cm) | 25 | 50 | 25 | 50 |
| $T$ (s) | 1,00 | 1,42 | 1,00 | 1,42 |
| $v_e$ ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) | 0,14 | 0,19 | 0,14 | 0,19 |

(a) Étude de la période.
- Montrer que les mesures permettent d'élimininer la relation $(C)$.
- Montrer que relation $(A)$ ne peut convenir.
- Trouver une valeur de l'intensité de la pesanteur, avec les données fournies.

(b) Étude de la vitesse au passage par la position d'équilibre.
Quelles relations peuvent être éliminées ? Pourquoi ?

# Exercices sur le travail et l'énergie

## 20 Force de frottement d'une moto

Une moto et son passager ont une masse totale de 380 kg. Le motocycliste roule sur une portion de route horizontale à 95 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Il arrive alors au pied d'une côte, dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est 4,5°, et passe au point mort (coupe l'action du moteur sur les roues).

1. Dans un premier temps, on néglige les forces de frottement.
   Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système {moto + passager}.
2. Quelle distance le motard parcourt-il sur la pente ?
3. En fait, il ne parcourt que 140 m. Évaluer la valeur de la force de frottement. On admettra que cette force est parallèle à la côte.

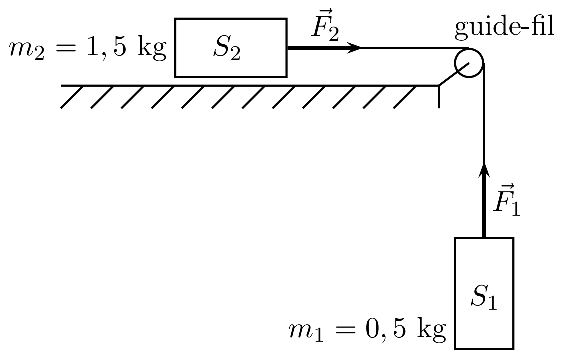
## 21 Trampoline

Lorsque le gymnaste quitte la toile du trampoline, sa vitesse est égale à 6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Il se maintient raide. On choisit une énergie potentielle nulle lorsque le gymnaste est immobile et debout sur le trampoline.

1. Définir l'énergie mécanique.
2. Donner l'expression littérale de l'énergie mécanique du gymnaste à un instant quelconque du saut.
3. Quelle hypothèse doit-on formuler pour considérer l'énergie mécanique du gymnaste comme constante ?
4. Cette hypothèse étant réalisée, calculer la hauteur maximale $H$ que peut atteindre le centre d'inertie du gymnaste.

## 22 Mouvement de deux solides reliés par un fil

Un palet autoporteur $S_2$ de masse $m_2 = 1,50$ kg est posé sur une table horizontale. Il est relié par un fil inextensible à un cylindre $S_1$ de masse $m_1 = 0,50$ kg suspendu au bout de ce fil. $G_1$ et $G_2$ sont les centres d'inertie respectifs des deux solides. Le fil passe dans un guide et reste constamment tendu. $S_2$ est initialement maintenu immobile : $G_2$ est dans la position $A_2$ et la position correspondante de $G_1$ est $A_1$.
On libère alors $S_2$ sans vitesse. Au cours du mouvement de translation des deux solides, on admet que les valeurs des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées par le fil sur $S_1$ et $S_2$ respectivement sont égales. Cette valeur n'est toutefois pas constante au cours du mouvement.
On considère une chute $A_1B_1 = h = 80,0$ cm du cylindre $S_1$, à l'issue de laquelle sa vitesse vaut $v$.



1. Parmi les forces agissant sur $S_2$ d'une part et sur $S_1$ d'autre part au cours de leurs mouvements, quelles sont celles dont le travail n'est pas nul ? Préciser à chaque fois s'il est moteur ou résistant.
2. Quelle est la distance $A_2B_2$ dont s'est déplacé $S_2$ ? Que dire de sa vitesse ?
3. On appelle $W_1$ le travail de la force $\vec{F_1}$ et $W_2$ celui de $\vec{F_2}$ sur le déplacement. Quel est le signe de $W_1$ ? de $W_2$ ? On admet que $W_2 = -W_1$ : commenter cette hypothèse.
4. Exprimer $W_1$ en fonction de $m_1$, $g$, $v$ et $h$, puis $W_2$ en fonction de $m_2$ et $v$.
5. En déduire $v$ en fonction de $m_1$, $m_2$, $g$ et $h$. Calculer $v$.

## 23 Skieur sur un remonte-pente

Un skieur, considéré comme un solide indéformable et dont la masse totale avec l'équipement est de 95,0 kg, est tracté à la vitesse constante de 2,20 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ par un remonte-pente. La trajectoire rectiligne du centre d'inertie du skieur se trouve dans plan vertical. Le plan de la piste fait un angle $\alpha = 20,0°$ avec l'horizontale et on suppose que les frottements entre les skis et la neige verglacée sont négligeables.
L'action de la perche sur le skieur est modélisée par une force résultante $\vec{F}$, de valeur $F$. On appelle $\beta$ l'angle entre la direction de la perche et la direction de la piste. On admettra que $\vec{F}$ a même direction que la perche.

1. Actions subies par le skieur.
   (a) Représenter sur un schéma (sans considération d'échelle) les forces agissant sur le skieur.
   (b) Quelle est la direction de la résultante $\vec{R}$ des actions de la neige verglacée sur les skis ?
2. Travail du poids.
   La distance $AB$ parcourue par le skieur est égale à 520 m.
   (a) Le travail du poids du skieur $W_{AB}(\vec{P})$ est-il résistant ou moteur ?
   (b) Calculer la différence d'altitude $z_B - z_A$ entre les points $A$ et $B$.
   (c) Calculer $W_{AB}(\vec{P})$.
3. Travail de la force $\vec{F}$.
   (a) Quelle relation vectorielle lie les forces s'exerçant sur le skieur ?
   (b) On considère l'axe $x'Ox$ parallèle à la piste et orienté vers le haut ; soit $\vec{i}$ le vecteur unitaire de cet axe. Exprimer la coordonnée sur $Ox$ de chacune de ces forces. En déduire une relation sur ces coordonnées.
   (c) Déterminer alors la valeur de la grandeur $F \cos \beta$ ainsi que le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ entre $A$ et $B$.
   (d) Déterminer la puissance de cette force. Cette puissance dépend-elle de la distance parcourue ?
4. Valeur de $\vec{F}$ et de $\vec{R}$.
   La valeur de l'angle $\beta$ est égale 45,0°.
   (a) Calculer la valeur $F$ de la force $\vec{F}$.
   (b) Calculer la valeur $R$ de la résultante $\vec{R}$.

## 24 Jeu d'animation (MR Bordeaux 2006)

Un jeu d'animation est composé d'un rail dont la première partie $OB$ est inclinée d'un angle $\alpha$ avec l'horizontale et la deuxième partie $BC$ est horizontale.
Au point $C$ se trouve une sphère $S$ de 200 g suspendue à un fil inextensible et de masse négligeable. La sphère $S$ doit atteindre une hauteur minimale $h' = 0,5$ m pour que le point soit gagnant.
Le joueur lâche, sans vitesse initiale, d'un point $A$ situé à une hauteur $h$, un solide de masse $m = 200$ g qui glisse sur le rail. Il atteint le point $B$ avec une vitesse $V_B = 7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
On considère que les forces de frottements sont négligeables sur cette portion $AB$.
On prendra la valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.


1. Faire l'inventaire des forces appliquées au solide sur cette partie inclinée $AB$ et les représenter sur un schéma.
   De quelle hauteur $h$ le solide a-t-il été lâché ?
2. Sur la portion $BC$, les frottements sont tels que la vitesse au point $C$ est $v_C = 5,5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et la durée du parcours $BC$ est $\Delta t_{BC} = 0,5$ s.
   Représenter les forces appliquées au solide quand il se trouve sur la partie horizontale $BC$. Calculer l'intensité de la force $f$.
3. Au point $C$, le mobile heurte la sphère $S$ et lui communique la moitié de son énergie cinétique. À quelle hauteur $h'$ la sphère va-t-elle s'élever ? Le point est-il gagné ?

## 25 Chute verticale (MR Paris 2006)

Un enfant lance vers le haut une bille de masse $m = 30$ g. À une hauteur $h = 1,40$ m au-dessus du sol, sa vitesse est de $3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par rapport au sol. On néglige la résistance de l'air.

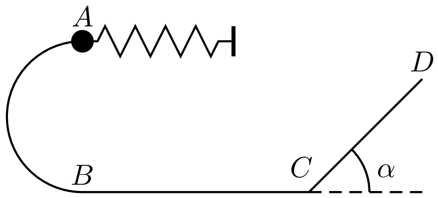
1. Calculer l'énergie mécanique du système $\{$bille-Terre$\}$ en prenant l'origine de l'énergie potentielle au sol.
2. Jusqu'à quelle hauteur la bille va-t-elle monter ?
3. Avec quelle vitesse va-t-elle repasser à l'altitude $h = 1,40$ m ?
4. Avec quelle vitesse va-t-elle atteindre le sol ?

*On prendra $g = 9,8$ N/kg.*

## 26 Étude d'une petite bille (MR Poitiers 2004)

1. **Mise en mouvement de la bille.**
   Un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, a un coefficient de raideur $k = 40$ N/m et une longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm. L'axe du ressort est horizontal. Il est fixé à son extrémité droite par un support fixe. À son extrémité gauche, une bille de masse $m = 50$ g est placée contre une butée $P$. Ce ressort va être utilisé pour lancer

la bille dans une gouttière. On comprime le ressort ; sa longueur devient $\ell = 8$ cm ; on libère le système. La bille quitte la butée lorsque le ressort reprend sa longueur initiale.

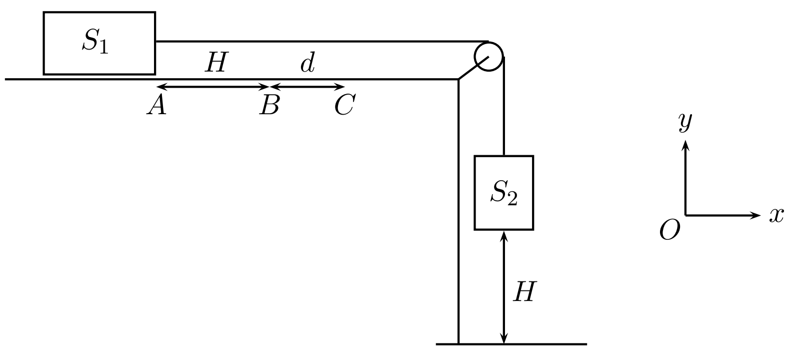



En supposant les frottements négligeables, établir l'expression littérale de la vitesse $v_A$ avec laquelle la bille quitte le ressort puis effectuer l'application numérique.

2. **Mouvement de la bille dans la gouttière située dans un plan vertical.**
La gouttière $ABCD$ sert de parcours à cette bille supposée ponctuelle. $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Les frottements sont négligés, la gouttière étant parfaitement lisse. $AB$ est un demi cercle de rayon $r = 0,5$ m. La bille part de $A$ avec la vitesse $v_A$ précédente.
   (a) Énumérer et représenter en $M$ les forces extérieures subies par la bille.
   (b) Établir le travail de ces forces entre $A$ et $B$.
   (c) En déduire l'expression de la vitesse en $B$. Calculer sa valeur numérique $v_B$.
   (d) La bille parcourt la partie rectiligne horizontale $BC = 80$ cm puis arrive en $D$ avec la vitesse $v_D = 4$ m/s. Après avoir décrit le mouvement de la bille entre $B$ et $C$, calculer la longueur $L$ de la piste $CD$. $\alpha = 45°$.

## 27 Deux solides liés par une poulie (MR Rennes 2004)

On entraîne un solide $S_1$ de masse $m_1$ par la chute d'un solide $S_2$ de masse $m_2$ sur une hauteur $H$. Ainsi lancé sur la longueur $H$, le solide $S_1$ frottant sur le support horizontal parcourt la distance $d$ avant de s'arrêter. Le fil de liaison est supposé inextensible et de masse négligeable. On néglige la masse de la poulie de transmission. On note $f$ la valeur de la force de frottement qui est constante tout le long du parcourt $AC$.
La vitesse initiale en $A$ est nulle.




1. **Étude dynamique sur le parcours $AB$.**
   (a) Faire le bilan des forces appliquées sur les solides sur le parcours $AB$.
   (b) Appliquer la deuxième loi de Newton aux deux solides. Projeter ces relations sur les axes $Ox$ et $Oy$ et déterminer l'expression de l'accélération $a$ du solide $S_1$ en fonction de $m_1$, $m_2$, $g$ et $f$.
   (c) La mesure de l'accélération du mobile sur ce parcourt est $a = 3\ \mathrm{m/s^2}$. Calculer la valeur de la force de frottement $f$.
   (d) Le temps pour réaliser ce parcours $AB$ est 0,5 s. Calculer la vitesse au point $B$ et déterminer $H$.

2. **Étude dynamique sur le parcours $BC$.**
   (a) Faire le bilan des forces appliquées au solide $S_1$ durant ce parcours.
   (b) La vitesse en $B$ est $v_B = 1,5$ m/s. Déterminer la distance $d$.

*Données :* $m_1 = 1,4$ kg ; $m_2 = 850$ g ; $g = 9,8$ m/s$^2$.

## 28 Freinage (ergo Créteil 2000)

Une voiture de masse $m = 900$ kg roule sur une route horizontale à la vitesse de 90 km $\cdot$ h$^{-1}$ soit 25 m $\cdot$ s$^{-1}$. Un obstacle oblige le conducteur à s'arrêter, roues bloquées, sur une distance de 90 m, sous l'action d'une force de freinage constante.

1. À l'aide d'un schéma, représenter toutes les forces agissant sur la voiture.
2. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de la force de freinage.
3. Quelle est l'accélération du véhicule pendant la phase de freinage ?
4. Quelle est la durée du freinage ?

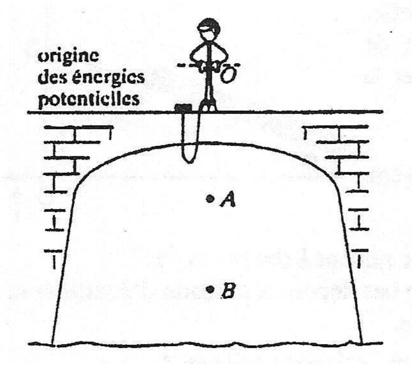
## 29 Descente d'un bloc

Un bloc de masse $m = 50$ kg se trouve en haut d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale. La longueur du plan incliné est $d = 4,5$ m.
Le bloc est alors lâché sans vitesse : il arrive en bas du plan avec une vitesse $v = 5,8$ m $\cdot$ s$^{-1}$.
On modélise le frottement par une force constante $\vec{F}$ parallèle au plan incliné.

1. Calculer $F$.
2. On retient le bloc par une corde parallèle au plan incliné. La force $\vec{T}$ exercée par la corde sur le bloc est constante, de valeur $T$. Calculer $T$ pour que le bloc arrive en bas du plan avec une vitesse égale à 2,0 m $\cdot$ s$^{-1}$, la valeur de $F$ restant inchangée.

## 30 Saut à l'élastique (ergo Créteil 2001)

Lors d'un saut à l'élastique, un homme de masse $m = 70$ kg saute d'un pont situé au-dessus d'une rivière. L'élastique ne commence à s'étirer que lorsque le centre d'inertie de l'homme a effectué une chute de 20 m, c'est-à-dire lorsqu'il passe au point $A$ tel que $OA = 20$ m.
L'homme continue ensuite à tomber, tendant l'élastique jusqu'à ce que son centre d'inertie atteigne le point $B$ tel que $AB = 15$ m.
On prend comme référence des énergies potentielles l'altitude de la position initiale $O$ du centre d'inertie de l'homme.




1. Étude de la première partie du saut, de $O$ à $A$.
   (a) Que vaut l'énergie mécanique de l'homme dans le champ de pesanteur en $O$ ?
   (b) En déduire la valeur de cette énergie en $A$.

(c) Calculer la valeur de la vitesse de l'homme au point $A$.

2. Étude de la deuxième partie du saut, de $A$ à $B$.
L'élastique, assimilable à un ressort de contante de raideur $k$, commence à s'étirer. En $B$, sa longueur est maximale et vaut 35 m. On considère maintenant le système : homme accroché à l'élastique dans le champ de pesanteur.
   (a) Reproduire et compléter le tableau ci dessous :

| États du système | Énergie cinétique | Énergie de pesanteur | Énergie élastique | Énergie mécanique |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | |
| $B$ | | | | |

   (b) En déduire la valeur de la constante de raideur de l'élastique.

## 31 Parachutiste (ergo Créteil 2003 - sans calculatrice)

Un parachutiste de masse $M = 80$ kg porte un équipement de masse $m = 20$ kg.
Il saute d'un hélicoptère avec une vitesse pratiquement nulle, le plancher de l'appareil étant à la hauteur $H = 200$ m au dessus du sol.

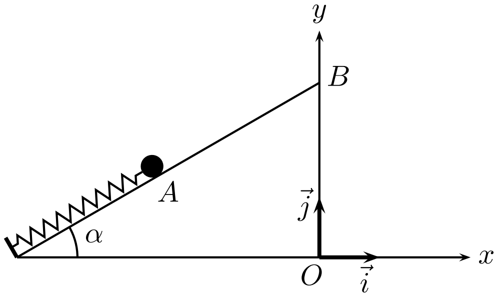
Le parachute descend verticalement avec une vitesse constante.

1. La valeur de la vitesse de chute est $v_1 = 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculer la valeur $R$ de la force de résistance de l'air s'exerçant alors sur le parachute et le parachutiste au cours de la chute. On donne $g = 10\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.
2. Même question si, avec un équipement différent, mais de même masse $m = 20$ kg, la vitesse de chute est $v_2 = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

   On suppose que le parachute se met en torche et n'effectue que partiellement son office : la valeur $R$ de la résistance prend maintenant la valeur constante $R = 0,6 \times P$.
3. Déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie du système.
4. Au bout de combien de temps après le départ le parachutiste arrivera-t-il au sol ?
5. Avec quelle vitesse ?

## 32 Mouvement d'une bille lancée par un ressort

Un ressort de constante de raideur $k$, de masse négligeable et de longueur à vide $L_0$ est fixé par une de ses extrémités à un point d'une butée fixe. Il peut osciller sans frottement suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. On relie l'extrémité libre du ressort à une petite bille de masse $m$. On considérera cette bille comme ponctuelle. À l'équilibre le ressort est comprimé de 1,0 cm par rapport à sa longueur à vide et la bille se trouve en $A$.




*Données :*
$m = 200$ g
$\alpha = 20°$
$y_B = 14$ cm
$AB = 20$ cm

1. Déterminer la valeur de la constante de raideur $k$ (en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$).
   On comprime le ressort de 8,0 cm vers le bas depuis la position d'équilibre et on lâche le système {bille + ressort} sans vitesse initiale.
2. Calculer la valeur de la vitesse $v_A$ (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) de la bille en $A$.
   On suppose que la bille quitte le ressort en $A$ avec la vitesse $v_A$.
   On négligera les frottements s'exerçant sur la bille entre $A$ et $B$.
3. Calculer la valeur de la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) de la bille en $B$.
   La bille quitte le plan incliné en $B$ avec la vitesse $v_B$.
   On néglige l'action de l'air sur la bille.
   Le mouvement est étudié dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   La bille touche le sol en $P$.
4. Déterminer la valeur de la distance $OP$ (en cm).
5. Déterminer la durée (en s) mise par la bille pour aller de $A$ en $P$.

# Exercices sur les mouvements plans

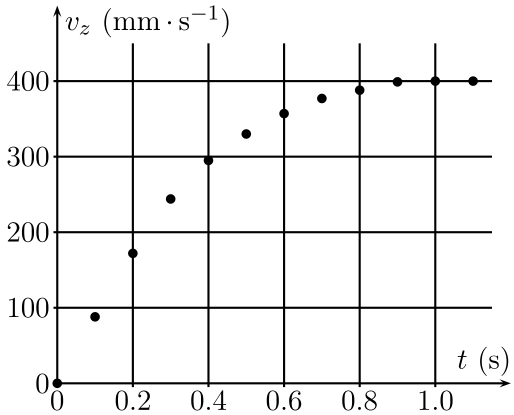
*On prendra :* $G = 6,67.10^{-11}$ *SI,* $g = 9,8\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$ *et rayon terrestre :* $R_T = 6\ 380$ *km.*

## 33 Vitesse limite

Un parachutiste de masse $m = 80$ kg saute sans vitesse initiale d'un hélicoptère. Avant d'ouvrir son parachute, la force de frottement exercée par l'air sur le parachutiste est proportionnelle au carré de la vitesse : $f = kv^2$ avec $k = 0,12\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.
On néglige la poussée d'Archimède.
Calculer la vitesse limite $v_L$ atteinte par le parachutiste avant qu'il ouvre son parachute.

## 34 Chute dans l'huile

On filme à l'aide d'une webcam la chute verticale dans l'huile d'une petite bille de masse $m = 13,3$ g. Après traitement informatique des données, on obtient l'évolution au cours du temps de la coordonnée $v_z(t)$ de la vitesse la bille, l'axe vertical $(Oz)$ étant orienté vers le bas.




1. (a) Quelle est la vitesse initiale $v_0$ de la bille ?
   (b) Quelle est sa vitesse limite $v_L$ ?
2. Déterminer le temps caractéristique de la chute.
3. Déterminer à l'aide de la courbe, la valeur de l'accélération à l'instant $t = 0$ s.
4. L'équation différentielle de la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv_z}{dt} = g\left(1 - \rho_f \frac{V_s}{m}\right) - \frac{k}{m} v_z(t)$$

   En déduire la valeur de la poussée d'Archimède et la valeur de $k$.

## 35 Parachute

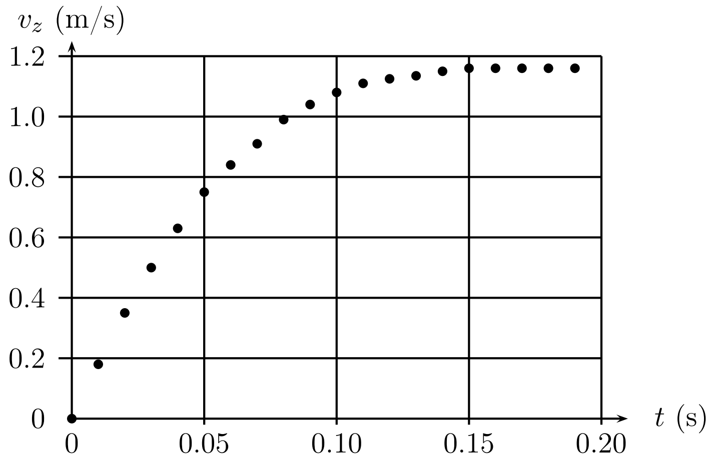
Un enfant joue avec un parachute en papier qu'il vient de fabriquer. Le parachute est constitué d'un cône en papier relié par quatre fils à un cylindre de volume $V = 1,6.10^{-5}\ \mathrm{m^3}$ et de masse $m = 1,5.10^{-2}$ kg.
Le volume et la masse des fils et du papier sont négligeables par rapport à ceux du cylindre.
L'enfant lâche son parachute, sans vitesse initiale, depuis le balcon de sa chambre. En l'absence de vent, le parachute tombe verticalement.

1. Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur le parachute.
   On admettra que l'air exerce sur le cône de papier une force de frottement $\vec{f}$ proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$ : $\vec{f} = -k\vec{v}$.
2. Montrer que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement et montrer qu'elle se met sous la forme :
   $\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m}v_z(t)$.
   On choisira un axe vertical $(Oz)$ orienté vers le bas.
4. Calculer la vitesse limite $v_L$ atteinte par le cylindre.
5. On résout cette équation différentielle par la méthode d'Euler. Calculer les deux premières valeurs non nulles de la vitesse.

*Données :* $k = 5,9.10^{-2}$ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ; pas de calcul : $\Delta t = 4,0$ ms ;
masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1,3$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

## 36 Jeu dans la piscine

1. On dispose d'une balle de masse $m = 58$ g et de volume $V = 160$ cm$^3$. Montrer que cette balle flotte sur l'eau et calculer le volume immergé.
2. On maintient la balle au fond de la piscine puis on la lâche sans vitesse initiale à l'instant de date $t_0 = 0$ s. On constate que la balle remonte verticalement à la surface.
   Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur la balle. On admettra que l'eau exerce sur la balle une force de frottement fuide $\vec{f}$ de valeur proportionnelle au carré de la vitesse $v$ : $f = kv^2$ avec $k = 0,78$ SI.
3. En appliquant la deuxième loi de Newton à la balle, établir l'équation différentielle du mouvement. On choisira un axe vertical $(Oz)$ orienté vers le haut.
4. Calculer la vitesse limite $v_L$ atteinte par la balle.
5. On résout l'équation diérentielle par la méthode d'Euler en utilisant un tableur. Le graphique $v_z(t)$ est reproduit.
   (a) Déterminer le temps caractéristique $\tau$ de la remontée.
   (b) Quelle est la valeur du pas de calcul $\Delta t$ utilisé ?
   (c) Retrouver par la méthode d'Euler la vitesse aux instants de dates $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_1 + \Delta t$ et $t_3 = t_2 + \Delta t$.




*Données :* masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0$ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

## 37 Plan incliné

Une savonnette de masse $m = 100$ g est posée, sans vitesse initiale, sur un plan incliné mouillé. La savonnette se met en mouvement et glisse suivant la ligne de plus grande pente du plan, ligne qui forme avec l'horizontale un angle $\alpha = 20°$. Le mouvement est filmé à l'aide d'une webcam. Le traitement informatique des données montre que la savonnette atteint une vitesse limite $v_L = 0,40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

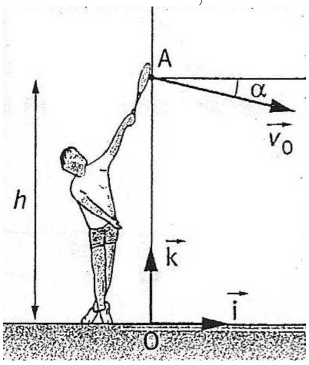
1. Dresser l'inventaire des forces extérieures exercées sur la savonnette. On admettra que le plan incliné exerce une force de frottement $\vec{f}$ opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$ : $\vec{f} = -k\vec{v}$.
2. Appliquer la deuxième loi de Newton à la savonnette. On utilisera un axe $(Ox)$ parallèle au plan et orienté dans le sens du mouvement,
3. (a) Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv_x}{dt} = g \sin\alpha - \frac{k}{m} v_x(t)$$

   (b) Calculer la valeur de $k$.
4. En admettant que $k$ ne dépend pas de l'inclinaison du plan, comment évolue la vitesse limite quand l'inclinaison augmente ?

## 38 Au tennis

Lors d'un service, un joueur de tennis frappe la balle une hauteur $h = 2,41$ m. Il lui communique alors une vitesse de valeur $v_0 = 54,2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. À cette date, choisie comme origine des temps, la balle est au point $A$. Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est dirigé vers le bas et fait un angle $\alpha = 5,20°$ avec l'horizontale. On étudie le mouvement de chute libre du centre d'inertie $G$ de la balle dans un référentiel terrestre muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$. L'origine $O$ est située au niveau du sol, à la verticale de $A$.




1. Établir les équations horaires du mouvement de $G$.
2. À quelle date $t_p$ la balle atteindra-t-elle le sol si elle n'est pas interceptée ?
3. À quelle distance $p$ de $O$ se trouvera-t-elle alors ?

## 39 Au golf

Frappée par un club, une balle de golf quitte le sol au point $O$, origine du repère, avec une vitesse de valeur $v_0 = 52\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ inclinée d'un angle $\alpha = 13°$ sur l'horizontale. On considère le mouvement de chute libre de la balle.

1. Quelles sont les composantes du vecteur accélération de $G$ selon les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ?

2. Dans quel plan se trouve la trajectoire de $G$ ?
3. Établir les expressions des coordonnées $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse de $G$.
4. Calculer la date $t_S$ à laquelle la balle passe par le sommet $S$ de sa trajectoire.
5. Calculer les coordonnées $x_S$ et $z_S$ de $S$.

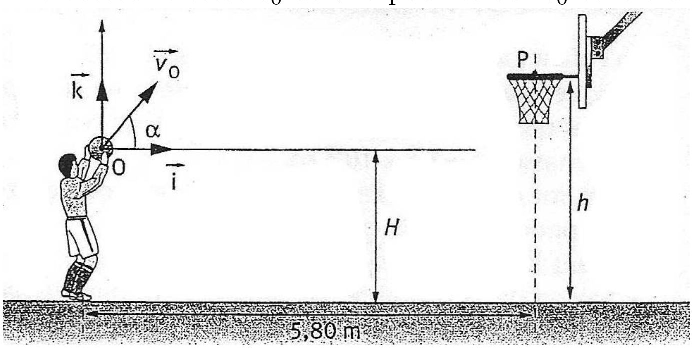
## 40 Équations de trajectoires

1. On considère le mouvement de chute libre d'un projectile de centre d'inertie $G$. La position initiale de $G$, d'altitude $h$, se trouve à la verticale de l'origine $O$ située au niveau du sol. Le vecteur vitesse initiale de $G$ est $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.
   (a) Faire un schéma de la situation.
   (b) Dans quel plan la trajectoire de $G$ est-elle située ?
   (c) Établir l'équation de la trajectoire de $G$.
   (d) Exprimer la distance $D$ entre le point $O$ et la position de $G$ au moment où le projectile retombe sur le sol.
2. Un joueur de rugby dégage en chandelle. Le centre d'inertie $G$ du ballon est confondu avec l'origine $O$ du repère d'étude à la date $t = 0$ s. On suppose qu'à l'issue du coup de pied, le ballon quitte le sol, le vecteur vitesse de $G$ étant de valeur $v_0 = 20,0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et l'angle de tir $\alpha = 65,0°$.
   (a) Établir l'équation de la trajectoire.
   (b) Déterminer la distance entre le point $O$ et la position du centre d'inertie du ballon lorsqu'il retombe au sol.

## 41 Lancer franc au basket

Le jeu de basket a été inventé en 1891 dans un gymnase de Springfield (États-Unis). La hauteur des paniers $h = 3,055$ m a été conservée. Au cours d'un match, chaque faute commise sur un adversire est sanctionnée par deux lancers francs. Le joueur chargé du lancer se place derrière une ligne située à 5,80 m du panier. On considère l'exemple suivant :

– lorsque la balle quitte la main du lanceur, son centre d'inertie $G$ se trouve dans la position $O$, situé à une hauteur $H = 2,34$ m et à une distance horizontale $D = 5,80$ m du centre du panier ;
– le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ de $G$ a pour valeur $v_0$ et fait un angle $\alpha = 52,5°$ avec l'horizontale.

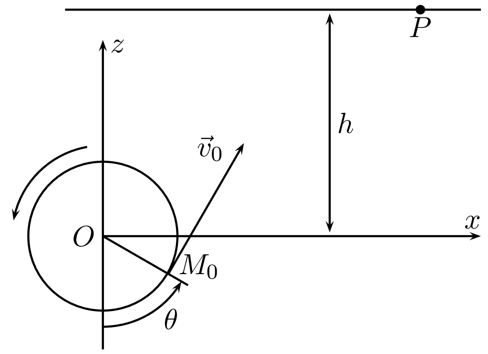



On considère le mouvement de chute libre de la balle dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$ lié au référentiel terrestre.

1. Établir l'expression littérale de l'équation $z = f(x)$ de la trajectoire de $G$.
2. Calculer la valeur que doit avoir $v_0$ pour que $G$ passe au centre du panier.

## 42 Tambour de lave-linge

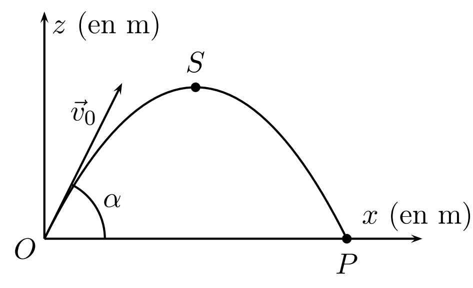
Le fonctionnement d'un tambour de lave-linge est testé dans un atelier. De diamètre $D = 50,0$ cm, son axe de rotation est horizontal, perpendicu1aire au plan du schéma et passe par le point $O$ origine du repère $(O; x, z)$.
La vitesse de rotation du tambour est portée à 600 tours par minute. Soudain, une petite pièce métallique de centre d'inertie $M$, mal fixée, se détache de la périphérie du tambour. À la date $t = 0$ s à laquelle elle se désolidarise du tambour, $M$ se trouve au point $M_0$ repéré par un angle $\theta = 60,0°$ par rapport à la verticale. Le mouvement ultérieur de la pièce est une chute libre. Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de $M$ est identique à celui que la pièce avait au point $M_0$, juste avant de se détacher.




1. Calculer les coordonnées $x_0$ et $z_0$ de $M_0$.
2. Calculer $v_0$.
3. Calculer les coordonnées $v_{x_0}$ et $v_{z_0}$ du vecteur $\vec{v}_0$ selon $\vec{i}$ et $\vec{k}$.
4. Exprimer numériquement les coordonnées $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse de $M$ au cours de son mouvement de chute libre.
5. Donner les équations horaires de ce mouvement.
6. Le plafond de l'atelier, horizontal, est situé à une hauteur $h = 3,20$ m par rapport à $O$.
   (a) Calculer la durée $t_P$ mise par la pièce métallique pour atteindre le plafond.
   (b) En déduire la coordonnée $x_P$ du point d'impact $P$.
7. Quelles auraient été les valeurs de $t_P$ et de $x_P$ si l'on avait supposé que le mouvement de la pièce était rectiligne et uniforme ?

## 43 Portée et flèche

Un projectile est lancé d'un point $O$ situé au sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ formant un angle $\alpha$ avec l'horizontale. On suppose que les forces dues à l'air sont négligeables.



1. Déterminer les expressions littérales des coordonnées du point $S$ situé au sommet de la trajectoire.
2. Établir de même les coordonnées du point $P$ de la trajectoire situé sur l'axe horizontal.
3. La flèche est l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile. Calculer sa valeur.
4. La portée est la distance entre les poin $O$ et $P$. Calculer sa valeur.
5. La valeur de la vitesse initiale étant constante pour quelle valeur de l'angle $\alpha$ la portée sera-t-elle maximale ?

*Données :* $v_0 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ , $\alpha = 50°$.

## 44 Mars

Planète mystérieuse, Mars est explorée depuis janvier 2004 par les sondes américaines Opportunity et Spirit. Étudions le mouvement de cette planète autour du Soleil.
*Données :*
– distance moyenne Soleil-Mars : 228 millions de km
– diamètre de Mars : $6,80.10^3$ km
– période de révolution : 687 jours
– masse de Mars : $M_M = 6,42.10^{23}$ kg
– masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}$ kg

1. Préciser le référentiel d'étude.
2. Établir l'expression du vecteur accélération de Mars.
3. En supposant la trajectoire circulaire autour du Soleil, déterminer l'expression de la vitesse, puis de la période de révolution de la planète.
4. Vérifier que la valeur de la période donnée ci-dessus est compatible avec la valeur calculée à l'aide de la formule établie à la question précédente.

## 45 Masse de Saturne

Lancée en 1997, Cassini-Huyghens est une mission spatiale destinée à l'exploration de Saturne. Le 14 janvier 2005, la sonde Huyghens s'est posée sur Titan, la plus grosse des « lunes » de Saturne.
Le tableau ci-dessous rassemble des données relatives à quatre de ses satellites :

| satellite | distance moyenne à Saturne $r$ (en km) | période de révolution $T$ |
|---|---|---|
| Janus | $159.10^3$ | 17 h 58 min |
| Encelade | $238.10^3$ | 1 j 8 h 53 min |
| Dione | $377.10^3$ | 2 j 17 h 41 min |
| Titan | $1220.10^3$ | 15 j 22 h 41 min |

1. Préciser le référentiel pour étudier le mouvement des satellites de Saturne.
2. Calculer le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ pour chacun des satellites en utilisant les unités du système international. La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée pour ces satellites ?
3. En négligeant l'action des autres astres que Saturne, appliquer la deuxième loi de Newton à un satellite supposé ponctuel. Donner toutes les caractéristiques du vecteur accélération.
4. Montrer que le mouvement circulaire uniforme est une solution possible de l'équation obtenue à la question précédente.

5. En supposant le mouvement circulaire, établir la relation entre la période de révolution et le rayon de la trajectoire.
6. Déterminer la masse $M$ de Saturne.

## 46 Satellite et énergie potentielle

Un satel1ite est en orbite circulaire autour de la Terre. Étudions les caractéristiques de son mouvement et son énergie potentielle d'interaction gravitationnelle.

Données :

– Terre : supposée parfaitement sphérique de centre $O$ ; masse $M_T = 5,98.10^{24}$ kg ; rayon $R_T = 6\ 380$ km ; période du mouvement d'ouest en est, autour de l'axe des pôles, $T = 86\ 164$ s.

– Satellite : centre d'inertie $S$ ; masse $m$ telle que $m \ll M_T$ ; altitude $h$.

1. Caractéristiques du mouvement :
   (a) Quelles sont les actions négligées lorsqu'un satellite est supposé soumis à la seule attraction gravitationnelle de la Terre (ce que nous admettrons dans la suite de l'exercice) ?
   (b) Quelles hypothèses fait-on sur la répartition de la masse de la Terre et sur la taille du satellite quand l'intensité de la force d'attraction a pour expression : $F_{T/S} = \dfrac{GM_Tm}{(R_T+h)^2}$ ?
   (c) Par rapport à quel référentiel, considéré comme galiléen, le satellite est-il animé d'un mouvement circulaire ?
   (d) Montrer que le satellite a un mouvement uniforme. En déduire l'expression de la vitesse du satellite sur son orbite.
2. Énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $E_p$
   L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $E_p$ entre deux objets de masse $m$ et $M$ situés à la distance $r$ l'un de l'autre augmente avec $r$ et a même dimension que le travail d'une force.
   (a) Choisir parmi les expressions suivantes celle qui convient pour $E_p$ après justification.

| hypothèse | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| expression | $GMmr$ | $\dfrac{-GMm}{r}$ | $\dfrac{GMm}{r}$ | $-GMmr$ |

   (b) On définit l'énergie potentielle d'interaction entre la Terre et le satellite par la relation : $\dfrac{dE_p}{dr} = F_{T/S}$ en choisissant $E_p = 0$ quand $r$ tend vers l'infini.
   En déduire l'expression de $E_p$. Ce résultat confirme-t-il la réponse à la question précédente ?

## 47 Les lois de Képler

Les distances maximale et minimale de Mars au centre $S$ du Soleil sont respectivement de 249 et 206 millions de km.

1. Quelle est la nature de l'orbite de Mars ? Que représente $S$ pour cette trajectoire ?
2. Calculer la demi-longueur du grand axe de cette orbite.
3. Énoncer la loi des aires. En quel point de la trajectoire la vitesse orbitale de Mars est-elle maximale ? minimale ?

## 48 Orbite de Vénus

L'orbite de Vénus est très proche d'un cercle de rayon $r$ égal à 108,2 millions de km. La période de révolution de cette planète est de 224,7 jours.

1. Calculer la valeur $v$ de la vitesse orbitale de Vénus. Dans quel référentiel le mouvement du centre de Vénus est-il défini ?
2. Établir la relation $v^2 = \dfrac{Gm_S}{r}$ où $m_S$ est la masse du Soleil.
3. Calculer la valeur de $m_S$.

## 49 La Lune

La période de révolution de la Lune est égale 25,5 j. On assimile l'orbite lunaire à un cercle de rayon $r = 384.10^3$ km.

1. Dans quel référentiel le mouvement de la Lune est-il défini ?
2. Calculer la valeur $v$ de la vitesse du centre de la Lune.
3. En déduire une valeur $m_T$ de la masse de la Terre.

## 50 Point d'équigravité de l'axe Terre Lune

La distance $D$ entre le centre $T$ de la Terre et le centre $L$ de la Lune est de $384.10^3$ km. La masse de la Lune est égale à 0,0123 fois celle de la Terre. En un point $M$ sur l'axe $TL$, à la distance $r$ de $T$, se trouve un objet de masse $m$.

1. Exprimer la somme vectorielle $\vec{F}$ des forces de gravitation de la Terre et de la Lune sur cet objet. On appellera $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe $TL$ orienté de $T$ vers $L$.
2. Calculer la valeur de $r$ telle que $\vec{F} = \vec{0}$. Comparer cette valeur à la distance $D$ et commenter le résultat.

## 51 Mouvement apparent d'un satellite

Un satellite terrestre est en mouvement circulaire dans le plan équatorial.

1. Exprimer sa vitesse angulaire orbitale dans le référentiel géocentrique, en fonction du rayon $r$ de sa trajectoire. On appellera $m_T$ la masse de la Terre.
2. Quelle est la période d'un satellite géostationnaire ? Calculer sa vitesse angulaire $\omega_{GS}$. Dans quel référentiel est-elle définie ? Dans quel sens le satellite parcourt-il sa trajectoire ?
3. (a) On appelle $r_{GS}$ le rayon de l'orbite géostationnaire. Comparer $\omega$ à $\omega_{GS}$ si $r > r_{GS}$. Quel sera le mouvement apparent du satellite pour un Terrien ?
   (b) Reprendre la question précédente pour $r < r_{GS}$.

## 52 Détermination de la masse de Mars (MR Caen 2006)

La planète Mars, de masse $M$, possède deux satellites naturels : Phobos et Deimos. Dans un référentiel centré sur Mars et supposé galiléen, les deux satellites sont animés d'un mouvement supposé circulaire uniforme. La planète Mars et ses satellites possèdent une répartition de masse sphérique. Soit $r$ le rayon de l'orbite décrite par les satellites autour de Mars.
*Données :* le repère $(\vec{t}, \vec{n})$ est composé des vecteurs unitaires $\vec{t}$ tangent et $\vec{n}$ normal à la trajectoire.

1. Étude du mouvement des satellites :
   On considère que la seule force exercée sur chaque satellite de masse $m$ provient de la planète Mars.
   (a) Représenter qualitativement sur un schéma : Mars, un satellite (sa trajectoire et le repère $(\vec{t},\vec{n})$ qui lui est lié), ainsi que la force gravitationnelle exercée sur le satellite par Mars.
   (b) Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{M/S}$ exercée par Mars sur un satellite de masse $m$.
   (c) On se place dans le repère orthonormé $(\vec{t},\vec{n})$ lié au satellite. Dans ce repère, le vecteur accélération a pour expression : $\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$.
   Donner les expressions littérales de $a_t$ et de $a_n$.
   (d) En appliquant la 2ème loi de Newton, montrer que la vitesse d'un satellite de Mars a pour expression : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$
2. Troisième loi de Kepler et détermination de la masse de Mars :
   (a) Établir l'expression de la période de révolution $T$ d'un satellite autour de Mars en fonction de $r$, $G$ et $M$.
   (b) Retrouver la troisième loi de Kepler.
   (c) Phobos gravite à 9 380 km du centre de Mars avec une période de 7 h 39 min. Deimos a une trajectoire quasi-circulaire de rayon 23 460 km et une période de 30 h 18 min.
      i. Calculer la masse de Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos.
      ii. Refaire ce calcul avec le satellite Deimos.
      iii. Comparer les valeurs obtenues.

## 53 Satellites terrestres (MR Poitiers 2006)

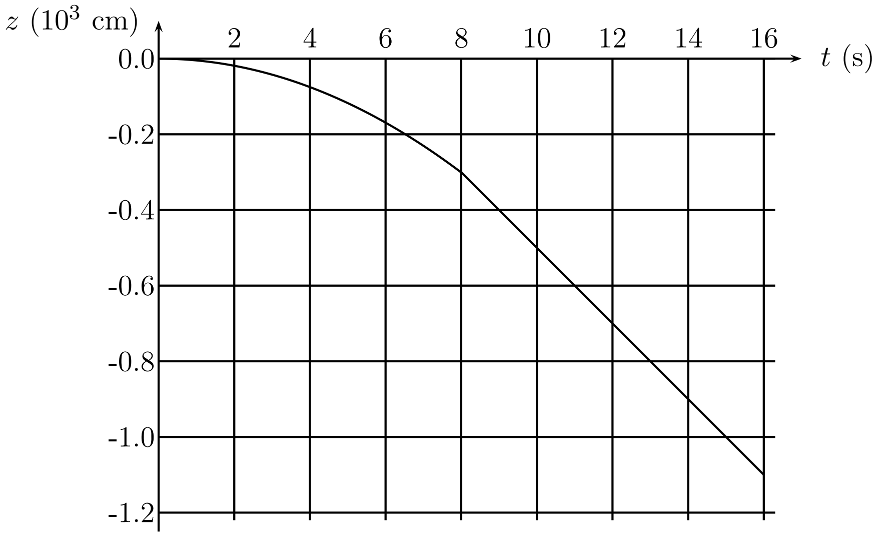
On note $G$ la constante de gravitation, $M$ la masse de la Terre, $R$ le rayon de la Terre. Un satellite terrestre, de masse $m$, décrit une orbite circulaire à une altitude $z = 600$ km.

1. Faire le schéma du système. Représenter la force exercée par la Terre sur le satellite. On suppose que c'est la seule force exercée sur le satellite.
2. Donner l'expression vectorielle de cette force.
3. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
4. Donner l'expression de la vitesse du satellite en fonction de $G$, $M$, $R$ et $z$.
5. Supposons un autre satellite terrestre de masse $m' = 2m$ évoluant sur la même orbite que le précédent. Comparer les vitesses de ces deux satellites.
6. Considérons maintenant un autre satellite dont l'altitude est notée $z''$. Sa vitesse est $v''$ telle que $v'' = \dfrac{1}{2}v'$. Donner l'expression littérales de $v''$. Calculer la valeur de $z''$.
   $R = 6\ 380$ km

## 54 Chute d'une bille (MR)

Une goutte d'eau, assimilée à une boule de rayon $R$, de masse $m$, tombe verticalement dans l'air. Elle est freinée dans sa chute par la force $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ ($\vec{v}$ : vecteur vitesse de la goutte ; $\eta$ : coefficient constant de viscosité). La poussée d'Archimède est négligée.

L'origine des dates et des coordonnées est prise à la position initiale de la goutte. On a enregistré l'altitude $z$ de la goutte au cours du temps.




1. Que peut-on dire de la courbe $z = f(t)$ à partir de $t = 8$ s ? Que peut-on en conclure ?
2. En déduire, à partir du graphique, que la vitesse limite $v_L$ atteinte par la goutte est égale à 1 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. (a) Faire le bilan des forces.
   (b) En appliquant la $2^{\text{ème}}$ loi de Newton, déterminer l'expression littérale de $\eta$ en fonction de $m$, $g$ (intensité de la pesanteur), $R$ et $v_L$.
   (c) Quelle est l'unité de $\eta$ ?

## 55 Satellite (MR Saint Germain 2005 - sans calculatrice)

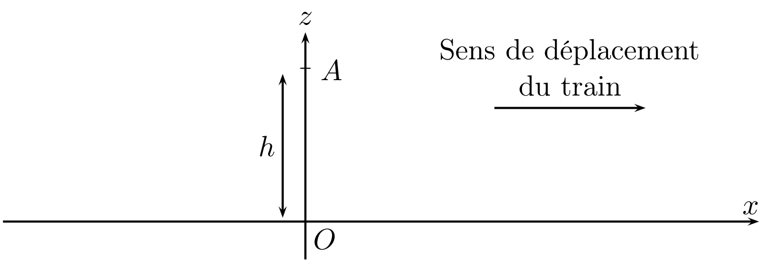
Un satellite artificiel de masse $m = 2,5$ tonnes gravite autour de la Terre à une altitude constante $h = 270$ km. La Terre est considérée comme ayant une répartition de masse à symétrie sphérique.
*Données :*
masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24}$ kg ; rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^3$ km ;
$G = 6,67.10^{-11}$ SI ; $\sqrt{60} = 7,7$.

1. Dans quel référentiel le satellite est-il en orbite circulaire ?
2. À quelle(s) force(s) est soumis ce satellite ? En donner les caractéristiques.
3. Donner l'expression du vecteur accélération et le représenter sur un schéma. Justifier.
4. Montrer que la vitesse a pour expression $v = [GM_T/(R_T + h)]^{\frac{1}{2}}$.
5. Vérifier que sa valeur est $v = 7,7$ km/s.
6. Établir la $3^{\text{ème}}$ loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R_T + h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$.

## 56 Bille lâchée du train (MR Bordeaux 2004)

Dans un train, un voyageur lâche malencontreusement par la fenêtre (à $t = 0$) un objet ponctuel de masse $m = 400$ g (point $A$ dans le repère terrestre $(\vec{Ox}, \vec{Oz})$). Le train roule à une vitesse constante $v = 100$ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et la fenêtre est située à une hauteur $h = 1,80$ m au-dessus du sol.

On négligera les forces de frottements et on prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.




1. Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ de l'objet à $t = 0$ : préciser la direction, le sens et la norme de ce vecteur.
2. Déterminer la nature et l'équation de la trajectoire de cet objet, dans le repère terrestre $(\vec{Ox}, \vec{Oz})$.
3. Soit $B$ le point où l'objet touche le sol. Calculer la distance $OB$.

# Exercices sur les systèmes oscillants

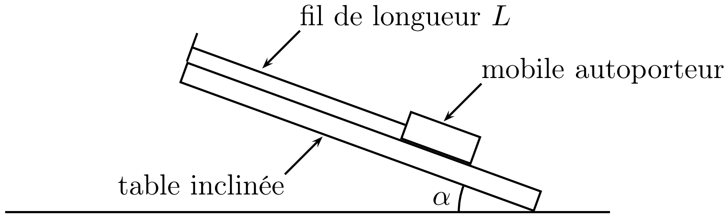
## 57 Intensité de la pesanteur et période propre

La période propre des oscillations d'un pendule simple s'exprime par la relation :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

On se propose d'étudier expérimentalement l'influence de la valeur de l'intensité de la pesanteur sur la période propre des oscillations d'un pendule.
On ne peut pas modifier la valeur $g$ du champ de pesanteur. Toutefois, grâce au dispositif représenté ci-dessous, tout se passe comme si le pendule était vertical et placé dans un champ de pesanteur de valeur $g'$ tel que $g' = g\sin\alpha$ avec $g = 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On se propose de vérifier expérimentalement que le pendule étudié se comporte comme un pendule simple placé dans un champ de pesanteur de valeur $g'$.

**Description du dispositif :** sur une table inclinée d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale, un petit mobile autoporteur de masse $m = 125$ g est suspendu, à un point fixe, par un fil de masse négligeable devant la masse du mobile et de longueur $L = 24,4$ cm.




**La méthode expérimentale :** on mesure la durée $\Delta t$ de vingt oscillations pour différentes valeurs de $\alpha$.

On obtient les mesures suivantes :

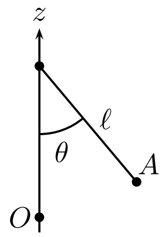
| $\alpha$ en ° | 90 | 70 | 50 | 30 | 20 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta t$ en s | 19,9 | 20,6 | 22,6 | 28,2 | 33,9 | 46,5 |

Connaissant l'expression de la période propre, Sofiane propose, pour étudier l'influence de la valeur de l'intensité de la pesanteur, de tracer la courbe représentative des variations de la période $T$ en fonction de $\frac{1}{\sqrt{g'}}$.

1. Rappeler à quelles conditions un pendule fil-boule peut être considéré comme un pendule simple.
2. Vérifier, à partir de l'expression de $T_0$, que la courbe attendue par Sofiane est une droite. En déduire l'expression littérale de son coefficient directeur.
3. Tracer la courbe représentative des variations de la période mesurée en fonction de $\frac{1}{\sqrt{g'}}$. Préciser les échelles choisies.
4. Les résultats expérimentaux permettent-ils de vérifier les hypothèses ?

## 58 Équations différentielles du pendule simple

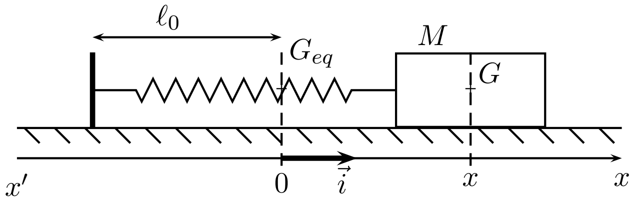
Un pendule simple de longueur $\ell$ et de masse $m$ est écarté de sa position d'équilibre puis lâché sans vitesse initiale à l'instant de date $t_0 = 0$ s. Il est représenté ci-dessous dans une position quelconque au cours des oscillations. On se propose d'établir l'équation différentielle des oscillations du pendule à partir d'une étude énergétique, puis d'étudier le cas particulier des oscillations de faible amplitude.




1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(t)$ du pendule en fonction de son abscisse angulaire $\theta(t)$. On choisit comme altitude de référence ($z = 0$) la position du point $A$ lorsque le pendule est à l'équilibre.
2. Établir l'expression de l'énergie cinétique $E_c$ du pendule en fonction de la vitesse $v(t)$ du point $A$, puis en fonction la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ du pendule.
   *Rappel :* $v(t) = \ell\frac{d\theta}{dt}$.
3. (a) Exprimer l'énergie totale $E(t) = E_c(t) + E_{pp}(t)$ en fontion de $m$, $g$, $\ell$, $\theta$ et $\frac{d\theta}{dt}$.
   (b) Établir l'expression mathématique de $\frac{dE}{dt}$.
   (c) Ce pendule n'échange pas d'énergie avec l'extérieur, aussi $E(t)$ reste constante au cours du temps. En déduire que $\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta\right) = 0$.
   (d) L'équation précédente admet deux solutions.
   Montrer que, seule, la solution $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ caractérise un mouvement et représente alors l'équation différentielle du mouvement du pendule.
4. Cas des oscillations de faible amplitude :
   Si $\theta$ reste petit, alors $\sin\theta = \theta$ (en radian).
   (a) Adapter l'équation différentielle du mouvement du pendule à ce cas particulier.
   (b) En vérifiant que la fonction $\theta(t) = \theta_0\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ est solution de cette nouvelle équation différentielle, établir l'expression de la période propre $T_0$ des oscillations.

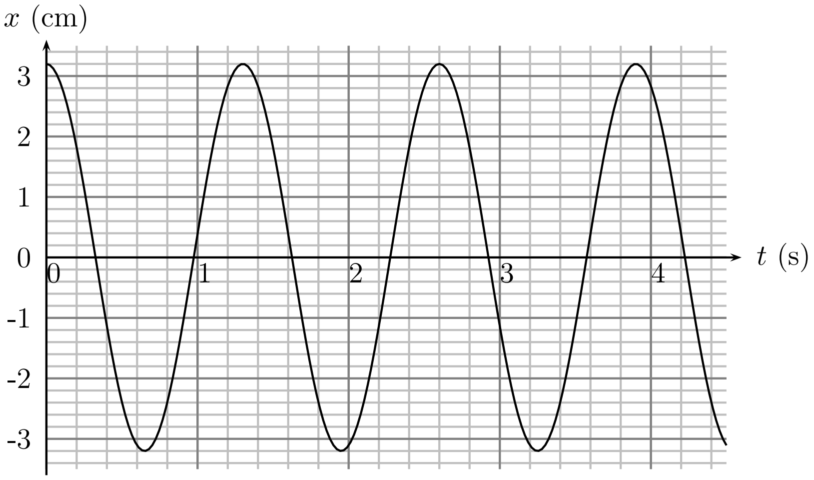
## 59 Dispositif solide-ressort sur coussin d'air

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort de raideur $k = 20\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et de longueur au repos de $\ell_0$ et d'un mobile autoporteur de masse $M = 800$ g, guidé en mouvement rectitigne sur une table horizontale.




Un montage potentiométrique (non représenté), relié à un ordinateur, permet d'enregistrer le déplacement du centre d'inertie du mobile en fonction du temps.
Le mobile est écarté de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale. L'enregistrement des différentes positions du centre d'inertie donne la courbe de la figure suivante.

La position du centre d'inertie est repérée par son abscisse $x$ mesurée à partir de sa position d'équilibre $G_{eq}$.

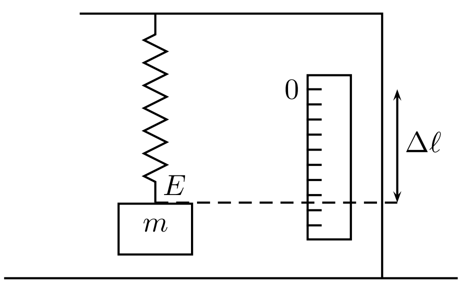



1. Sans tenir compte des éventuelles forces de frottement, représenter sur un schéma les forces qui s'exercent sur le mobile :
   (a) lorsqu'il est à l'équilibre.
   (b) lorsque le ressort est allongé.
2. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie du mobile.
3. La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.
   (a) Établir l'expression de la période propre $T_0$ puis calculer sa valeur.
   (b) La comparer à celle trouvée à partir de l'enregistrement.
4. En s'appuyant sur l'enregistrement, déterminer les valeurs de $X_m$ et $\varphi$.

## 60 Étude d'un ressort

On étudie ici par deux méthodes différentes, l'une statique et l'autre dynamique, la raideur d'un ressort à réponse linéaire.

1. **Étude statique :**
   Le ressort est accroché à une potence. À l'extrémité libre, appelée $E$, on suspend successivement des solides de masses de différentes valeurs. Le zéro de la règle correspond à la position de $E$ lorsque le ressort n'est pas déformé.



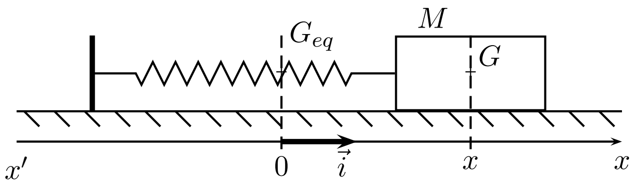

Pour chaque valeur de la masse $m$, on mesure l'allongement $\Delta\ell$ du ressort. On obtient le tableau suivant :

| $m$ (g) | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\ell$ (cm) | 0 | 1,6 | 3,3 | 5,0 | 6,5 | 8,2 |

(a) i. Tracer le graphique de l'allongement $\Delta\ell$ en fonction de la masse $m$.
ii. Établir la relation numérique entre $\Delta\ell$ et $m$.

(b) i. Dresser le bilan des forces s'exerçant sur le solide puis les représenter sur un schéma.
ii. En étudiant l'équilibre du solide, établir l'expression de la raideur $k$ du ressort puis calculer sa valeur.

2. **Étude dynamique :**
Dans cette partie, le ressort précédent est utilisé pour réaliser un dispositif solide-ressort horizontal. On supposera que tous les frottements sont négligeables.
On utilise un axe horizontal $(Ox)$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{i}$, et on repère la position du centre d'inertie $G$ du solide de masse $M = 300$ g par son abscisse $x$ sur cet axe.




On choisit comme origine de l'axe la position de $G$ à l'équilibre (le ressort est alors non déformé).

(a) Réaliser un schéma des forces qui s'exercent sur le solide à l'instant de date $t$ correspondant à la figure précédente.

(b) En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide.

(c) La solution de cette équation est de la forme : $x(t) = X_m \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi\right)$
Établir l'expression de la période propre $T_0$ de l'oscillateur en fonction de $M$ et de $k$.

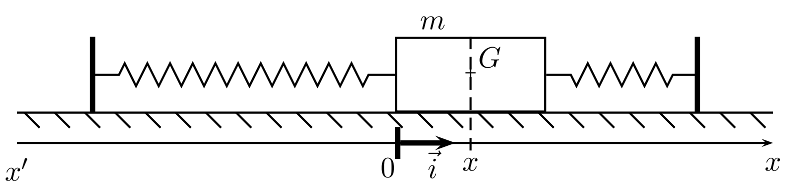
(d) La durée de dix oscillations est de 4,4 s. Déterminer la valeur de la raideur $k$.

3. **Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.**

## 61 Système horizontal à deux ressorts

Pour le dispositif représenté ci-dessous :
– un solide est fixé à l'extrémité de deux ressorts identiques (même longueur à vide $\ell_0$ et même raideur $k = 4,8\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$), de masse nulle.
– le solide, de masse $m = 36$ g, se déplace sans frottement dans un mouvement de transtation, sur un banc rectiligne horizontal.
– la distance entre les deux points d'attache fixes des ressorts est telle qu'à l'équilibre du solide comme pendant ses oscillations, les ressorts sont allongés.

On repère la position du centre d'inertie $G$ du solide par son abscisse $x$ sur l'axe horizontal $(x'x)$.




L'origine $O$ de l'axe correspond à la position de $G$ à l'équilibre du système. Un dispositif informatisé permet d'enregistrer l'abscisse du point $G$ en fonction du temps.

1. Étude de l'équilibre :
   (a) Dresser le bilan des forces qui s'exercent sur le solide lorsqu'il est dans la position d'équilibre.
   (b) Montrer que les deux ressorts ont alors le même allongement que l'on notera $\Delta\ell_0$.
2. Étude théorique des oscillations du solide :
   (a) Exprimer en fonction de $\Delta\ell_0$ et de $x$ l'allongement de chacun des ressorts pendant les oscillations.
   (b) Représenter les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par les ressorts sur le solide.
   (c) En appliquant la deuxième loi de Newton au solide, établir l'équation différentielle de son mouvement.
   (d) La solution de l'équation différentielle est de la forme : $x(t) = X_m \cos\left(2\pi\dfrac{t}{T_0} + \varphi\right)$
   Établir l'expression de la période propre $T_0$ de l'oscillateur.
   (e) Montrer que les deux ressorts sont équivalents à un ressort unique de raideur $k' = 2k$.
   (f) Calculer la valeur théorique de $T_0$.

## 62 Détermination expérimentale de la pesanteur

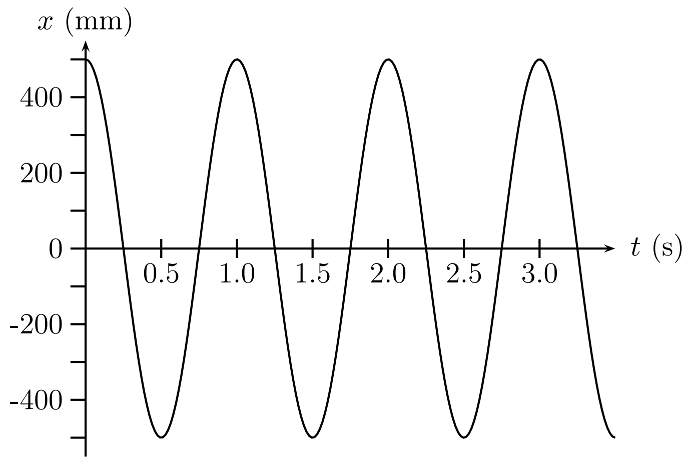
Un ressort à spires non jointives, de constante de raideur $k$ et de masse négligeable, est suspendu à un support vertical par l'une de ses extrémités. Un solide $S$, de masse $m$, est accroché à l'extrémité inférieure du ressort. Ce dernier s'allonge alors de $x_0$ et une position d'équilibre est atteinte.
À partir de cette position d'équilibre, on étire le ressort en faisant descendre le solide verticalement puis on le lâche.
On constate que le solide $S$ effectue, de part et d'autre de sa position d'équilibre stable, des oscillations d'amplitude $a$ et de période $T_0$.
On déclenche le chronomètre lors du passage du solide par sa position d'équilibre en repérant s'il monte ou descend, avant de l'arrêter après 20 oscillations.
Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans le tableau suivant :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ (g) | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
| $x_0$ (cm) | 4,0 | 8,1 | 12,2 | 16,2 | 20,2 |
| Durée de 20 oscillations (s) | 8,12 | 11,50 | 13,90 | 16,06 | 17,91 |

1. (a) Pourquoi mesure-t-on la durée de 20 oscillations plutôt que d'une seule ?
   (b) L'amplitude du mouvement ne reste en fait pas constante au cours du temps. Pourquoi ?
   (c) À partir de l'étude statique, établir la relation entre $x_0$, $g_0$, $m$ et $k$ ($g_0$ représente la valeur de la pesanteur au lieu de l'expérience).
2. Étude dynamique : détermination de $g_0$ :
   On établit théoriquement que : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
   (a) Exposer succinctement, sans la justifier, une démarche graphique qui, à partir des résultats expérimentaux rassemblés dans le tableau ci-dessus, permettrait de déterminer la valeur $k$ de la constante de raideur du ressort.
   (b) En exploitant la relation du §1c, établir celle donnant $T_0$ en fonction de $x_0$ et $g_0$.
   (c) Calculer $T_0^2$ pour chaque situation correspondant aux valeurs de $x_0$. Présenter les résultats sous forme de tableau.
   (d) Tracer la courbe des variations de $x_0$ en fonction de $T_0^2$.
   (e) En déduire la valeur de $g_0$.

## 63 Comment mesurer la masse d'un astronaute ?

La mesure de sa masse est un des éléments du bilan médical d'un astronaute. Mais comment se peser lorsqu'on se trouve dans l'espace dans une situation où règne l'impesanteur ? Comme l'utilisation d'un pèse-personne n'est plus possible, les scientifiques ont imaginé le dispositif suivant : l'astronaute, de masse $M$, prend place dans une cabine de masse $m = 20$ kg mobile le long d'un rail à coussin d'air. La cabine peut osciller sous l'action de deux ressorts identiques de raideur $k_1 = 2\ 000\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. On considérera pour simplifier que l'action de deux ressort est équivalente à celle d'un seul ressort de raideur $k = 2k_1$. Lorsque la soufflerie fonctionne, les frottements sont négligeables.
Un dispositif relié à un ordinateur permet d'obtenir les variations de l'abscisse $x$ du centre de gravité $G$ de l'ensemble $(S) = cabine + astronaute$ en fonction du temps $t$. L'abscisse $x$ est repérée par rapport à la position d'équilibre $O$ du système.
Lors d'un test du dispositif sur la Terre, l'astronaute installé dans la cabine déplace, à l'aide d'un câble, le système de $X_m = 0,5$ m ver la droite. À $t_0 = 0$, il lâche le câble avec une vitesse initiale nulle et laisse osciller l'ensemble sur le rail. L'écran de l'ordinateur affiche alors la courbe suivante.




1. **Équation horaire du mouvement :**
   (a) À l'instant $t$, le centre de gravité $G$ du système $(S)$ est déplacé vers la droite. Représenter toutes les forces s'exerçant sur le système.
   (b) i. Appliquer la deuxième loi de Newton. Montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement est de la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0$.
   Indiquer l'expression de $\alpha$.
   ii. Donner l'équation horaire du mouvement, solution de l'équation précédente.
2. **Détermination de la masse de l'astronaute :**
   (a) À partir de l'enregistrement présenté, déterminer la valeur $T_0$ de la période des oscillations.
   (b) En exploitant l'équation horaire, exprimer $T_0$ en fonction de $M$, $m$ et $k_1$. En déduire l'expression de la masse $M$ de l'astronaute et sa valeur.
   (c) Pourquoi ce dispositif peut-il être utilisé en impesanteur ?

## 64 Oscillateur avec vitesse initiale

Un pendule élastique est constitué d'un mobile de masse $m = 350$ g pouvant se déplacer sur un banc à coussin d'air horizontal. Ce mobile est attaché à un point fixe par un ressort à

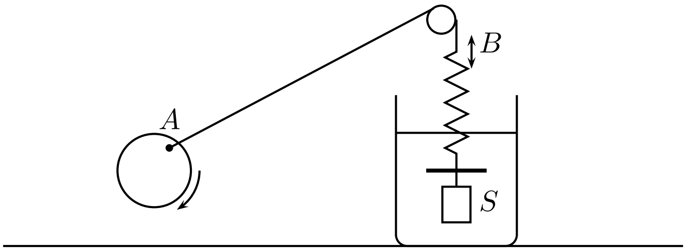
spires non jointives de raideur $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. À l'équilibre, la position du centre d'inertie $G$ du mobile coïncide avec le point $O$, origine de l'axe $(O, \vec{i})$.
À l'instant $t = 0$ s, on écarte le mobile de sa position d'équilibre. L'abscisse de $G$ est alors $x = 4,0$ cm. On lance le mobile avec une vitesse de valeur $v_0 = \dfrac{dx}{dt}(t = 0) = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ telle que $v_{0x}$ soit négative.
Les frottements exercés par l'air sont modélisés par une force $\vec{f}$ colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie $G$ du mobile, telle que : $\vec{f} = -C\vec{v}$ où $C$ est un coefficient positif.

1. Exprimer la coordonnée $F_x$ de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide en fonction de l'abscisse $x$ de $G$.
2. Exprimer la coordonnée $f_x$ de la force de frottement en fonction de la coordonnée $v_x$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ de $G$.
3. Représenter sur un schéma sans considération d'échelle les forces extérieures s'exerçant sur le mobile autoporteur.
4. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par $x$.
5. L'action de l'air est maintenant négligeable. Que devient l'équation différentielle précédente ?
6. On admet que $x(t) = X_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ est solution de l'équation différentielle précédente.
   Déterminer les valeurs de $T_0$, $X_0$ et $\varphi$ en exploitant les conditions initiales du mouvement.

## 65 Oscillateur amorti

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort vertical de masse nulle, de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $L_0 = 0,100$ m, auquel est suspendu un solide $S$ de masse $m = 50$ g.
Dans tout l'exercice, nous considèrerons que la constante de pesanteur vaut $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

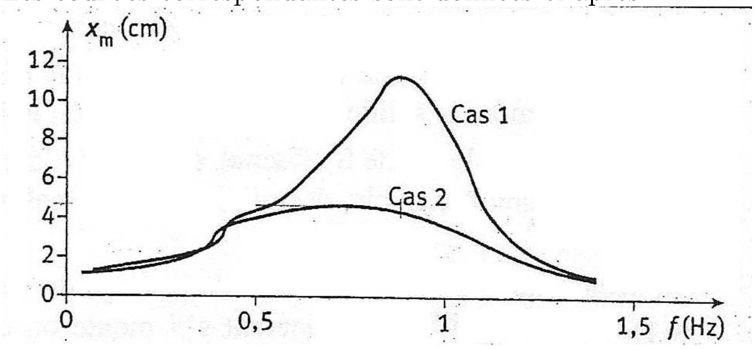
1. **Détermination de la fréquence propre de l'oscillateur :**
   (a) Représenter le ressort à l'équilibre en faisant apparaître 1es forces agissant sur la masse suspendue.
   (b) La longueur du ressort à l'équilibre est $L = 0,120$ m. Déterminer la constante de raideur de ce ressort.
   (c) On écarte la masse verticalement vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale. Le système évolue sans frottement. Comment peut-on qualifier ces oscillations ?
   (d) La période propre dépend des caractéristiques du système : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
   Calculer la fréquence propre $f_0$ de cet oscillateur.
2. **Étude d'un oscillateur soumis à une excitation sinusoïdale :**
   (l'oscillateur employé ici n'est pas le même que dans la partie 1).




La vitesse de rotation du moteur est réglable. L'arbre est muni d'un excentrique $A$. La vitesse de rotation du moteur est imposée. Le point $A$ décrit alors un cercle de rayon $r$. Le point $B$ est animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude $a$. La fréquence du mouvement de $B$ est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation du moteur.

- Moteur arrêté : on détermine la fréquence propre de l'oscillateur élastique non amorti en mesurant la durée de 10 périodes. On trouve $f_0 = 1,0$ Hz. Pour cette mesure, le récipient contenant l'eau a été retiré.
- Moteur lancé : l'amplitude $x_m$ des oscillations du résonateur dépend de la fréquence du mouvement de $B$. On effectue deux séries de mesures :
  - cylindre immergé (cas 1).
  - cylindre immergé muni d'une rondelle de diamètre supérieur (cas 2).

Les courbes correspondantes sont données ci-après :




(a) Identifier l'excitateur et le résonateur.

(b) Préciser le type d'oscillations effectuées par l'oscillateur.

(c) Donner la valeur de la fréquence de résonance dans chaque cas. Préciser si l'oscillateur est faiblement ou fortement amorti.

## 66 Pendule élastique horizontal

Un mobile de masse $m$ est libre de se déplacer sur un banc à coussin d'air horizontal. Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de masse nulle et de constante de raideur $k$, dont l'autre extrémité est fixe. On choisit un repère $(O; \vec{i})$, l'origine $O$ étant confondue avec la position du centre d'inertie $G$ du mobile lorsqu'il est en équilibre. On lâche le mobile sans vitesse initiale, alors que $G$ est à la distance $a$ de sa position d'équilibre.

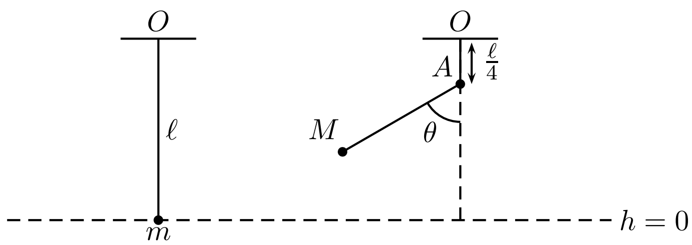
1. Calculer le travail de la force de rappel du ressort lorsqu'il s'allonge de $x$. Cette expression dépend-elle du sens du vecteur unitaire $\vec{i}$ choisi ?
2. Calculer l'énergie potentielle élastique initiale du ressort, ainsi que l'énergie mécanique du système {mobile-ressort} (On prendra l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort n'est ni étiré, ni comprimé).

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique du ressort lorsque l'abscisse du centre d'inertie du mobile est $x$.
4. Soit $v$ la valeur de la vitesse du mobile à une date $t$ quelconque lorsque le centre d'inertie du mobile a pour abscisse $x$.
   (a) En exprimant la conservation de l'énergie mécanique, donner la relation liant $v$ et $x$.
   (b) Dériver cette expression par rapport au temps et conclure.

## 67 Pendule (MR Bordeaux 2004)

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle $m = 200$ g suspendue à un fil sans masse de longueur $\ell = 0,8$ m. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 60°$ puis lâché sans vitesse initiale.
Les forces de frottements sont négligeables.
On prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Quelle est la vitesse du pendule lorsqu'il repasse par la position verticale ?
2. On place au point $A$ une butée. Soit $M$ le point le plus haut atteint par la masse $m$.




Calculer l'altitude du point $M$ ainsi que la valeur de l'angle $\theta$.
On prendra comme référence l'altitude $h = 0$, la position de $m$ quand le fil est vertical.

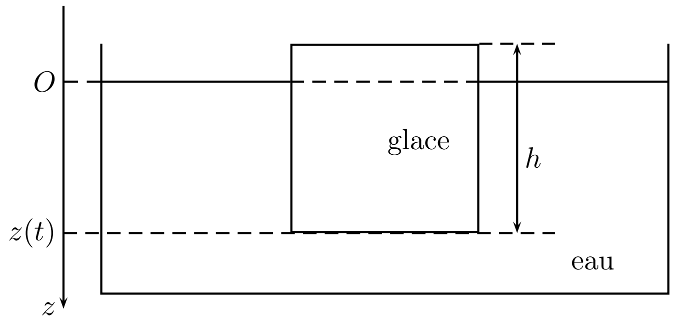
# Encore quelques exercices. . .

## 68 Oscillations d'un glaçon

Soit un cube de glace d'arête $h$ placé à la surface de l'eau contenue dans une cuve. L'axe $(Oz)$ est fixe orienté vers le bas. L'origine $O$ est prise à la surface de l'eau dont l'altitude est supposée constante, le volume de la cuve étant très grand devant celui du glaçon.
Soit $z(t)$ l'ordonnée de la surface inférieure du glaçon mesurée sur cet axe.

1. Établir la relation entre l'ordonnée à l'origine $z_{eq}$ et l'arête $h$ lorsque le glaçon est immobile.
2. On enfonce le cube de glace jusqu'à ce que la face inférieure soit à une ordonnée $z_0$, telle que $z_{eq} < z_0 < h$. On lâche le cube à $t = 0$ sans vitesse initiale.
   (a) Les frottements sont supposés négligeables. Établir l'équation différentielle du mouvement du glaçon. Montrer qu'elle est de la forme $\dfrac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g$ dans laquelle $\omega_0$ a une expression que l'on précisera.
   (b) L'équation différentielle a pour solution $z = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + C$.
   Exprimer $A$, $B$, et $C$ en fonction de $z_0$ et $z_{eq}$.

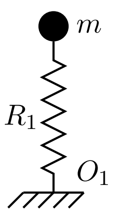
*Donées :* $\rho_{glace} = 0,90\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ; $\rho_{eau} = 1,0\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.




## 69 Système à deux ressorts

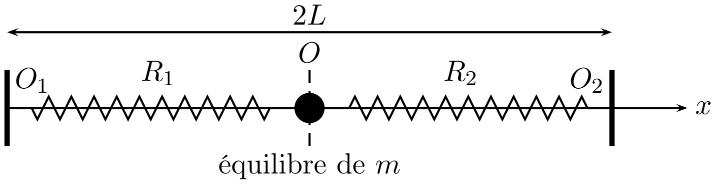
*Il est demandé l'expression des valeurs littérales avant tout calcul numérique. Les notations du texte doivent être scrupuleusement respectées.*
Dans tout l'exercice les frottements sont négligés.
On dispose d'un ressort $R_1$ de longueur à vide $\ell_0$, de raideur $k_1 = k = 10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de masse négligeable.
*Notations :* Si $\ell$ est la longueur d'un ressort, on notera $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ son alongement algébrique.
*Données :* $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ; $\ell_0 = 10$ cm.

1. L'axe du ressort $R_1$ est placé verticalement, son extrémité inférieure est fixée en $O_1$ à un support immobile. On dépose à son extrémité supérieure une masse ponctuelle $m = 40$ g.




   (a) Faire le schéma des forces appliquées à $m$.
   (b) Calculer le rallongement $\Delta\ell$ du ressort ainsi que sa longueur à l'équilibre.

2. On dispose maintenant d'un second ressort $R_2$, de même longueur à vide $\ell_0$ que $R_1$, mais de constante de raideur $k_2 = 3k = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.
La masse $m$, qui coulisse sans frottement le long de la tige $(O_1, O_2)$, est accroché à $R_1$ et $R_2$, tendus entre les points $O_1$ et $O_2$.
On notera $O_1O_2 = 2L = 30$ cm.



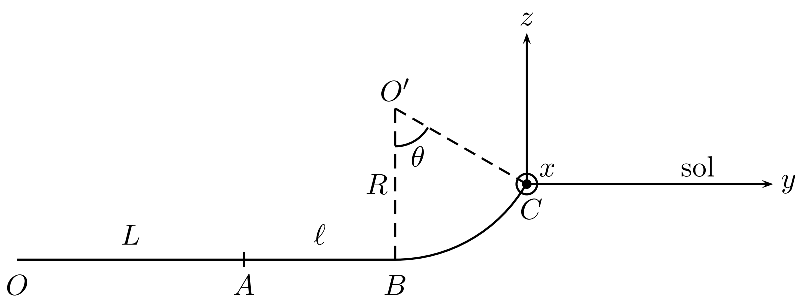

   (a) Soient $\Delta\ell_{10}$ et $\Delta\ell_{20}$ les allongements des ressorts $R_1$ et $R_2$ à l'équilibre.
      i. Faire un schéma du système et représenter $\Delta\ell_{10}$, $\Delta\ell_{20}$ ainsi que les forces appliquées à la masse $m$.
      ii. Quelle relation existe-t-il entre $\ell_0$, $\Delta\ell_{10}$, $\Delta\ell_{20}$, et $L$ ?
      iii. Écrire la condition d'équilibre de $m$. En déduire les expressions et les valeurs numériques de $\Delta\ell_{10}$ et $\Delta\ell_{20}$.
   (b) On écarte la masse $m$ de sa position d'équilibre en tirant vers la droite de $a = 2,0$ cm et on la lâche sans vitesse initiale.
   On repèrera la masse $m$ par son abscisse $x$ sur l'axe $(\vec{Ox})$, orienté vers la droite, où $O$ coïncide avec la position de $m$ à l'équilibre.
      i. Exprimer à l'instant $t$ les allongements $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ des ressorts $R_1$ et $R_2$ en fonction de $x$, $\Delta\ell_{10}$ et $\Delta\ell_{20}$.
      ii. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse.
      iii. Montrer que l'équation horaire du mouvement de la masse $m$ est du type $x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \Phi\right)$.
      Déterminer les expressions littérales et numériques de $A$, $T_0$ et $\Phi$.

## 70 Cinématique

1. Une automobile de masse $M = 1,6$ t démarre, sans vitesse initiale, sur une route rectiligne horizontale. La phase de démarrage est une phase d'accélération pendant laquelle aucune force ne s'oppose à l'avancement, alors que le moteur exerce une force constante $\vec{F}$, constamment parallèle au déplacement.
   (a) i. Effectuer le bilan des forces extérieures agissant sur l'automobile.
      ii. En donner une représentation au point $G$ (centre d'inertie de l'automobile) à un instant $t$ quelconque.
   (b) L'automobile parcourt la distance $OA = L = 700$ m et atteint la vitesse $v = 126 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
      i. À l'aide du théorème du centre d'inertie, établir la relation entre l'intensité de la force $F$ et la valeur $a$ de l'accélération.
      ii. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, établir la relation entre la vitesse $v$ et l'intensité $F$ de la force $\vec{F}$.
      iii. En déduire la relation entre la vitesse $v$ et l'accélération $a$.
      iv. Calculer la valeur $a$ de l'accélération.
      v. En déduire la valeur de la force $F$ exercée par le moteur.

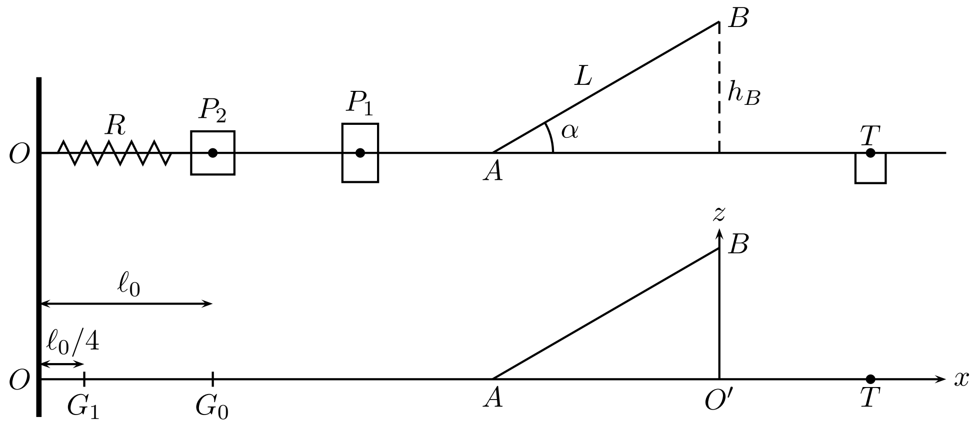
2. L'automobile aborde en $A$, avec la vitesse horizontale $v_A = 126\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, une portion de route $AB$ parfaitement horizontale, de longueur $\ell$. La route comprend ensuite une portion $BC$ circulaire, de centre $O'$, de rayon $R = 100$ m, telle que $O'C$ fait, avec la verticale, un angle $\theta = 60°$ (voir schéma). Les frottements sont supposés négligeables.
   (a) L'automobile arrive en $B$. Calculer $v_B$.
   (b) i. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, appliquée au tronçon $BC$, établir la relation liant $v_c$ à $v_B$, $R$, $g$ et $\theta$.
   ii. Calculer $v_C$.
3. Que devient la trajectoire du centre d'inertie $G$ de l'automobile après $C$ ?
   (a) Déterminer les équations horaires du mouvement du centre d'inertie $G$ de l'automobile dans le repère $Cxyz$ (voir schéma).
   (b) En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire.
   (c) Préciser la nature de cette trajectoire.
   (d) Préciser la nature du mouvement sur cette trajectoire.
   (e) L'automobile retombe sur le sol au point $I$. Calculer littéralement l'abscisse du point $I$.

*Données :* $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ ; $\sin 30° = 0,50 = \cos 60°$ ; $\sin 60° = 0,87 = \cos 30°$.




## 71 Mouvement d'un palet (sans calculatrice)

Un palet $P_1$, de masse $m_1$, est propulsé le long d'une piste à coussin d'air.
La piste comporte une rampe $AB$, de longueur $L$, inclinée d'un angle $\alpha$ sur l'horizontale, suivi d'un trou $T$ afin de recevoir ce palet.
Le palet $P_1$ est propulsé grâce à un choc avec un palet $P_2$ de masse $m_2 = 4m_1$.
Le palet $P_2$ est lui-même relié à un ressort horizontal de masse négligeable et de constante de raideur $k$. L'autre extrémité du ressort est fixée au point $O$.
À l'équilibre, la position du centre d'inertie $G_2$, du palet $P_2$ , est notée $G_0$, et se définit par la distance $OG_0 = \ell_0$.



Trois hypothèses simplificatrices sont faites pour l'étude théorique de ce dispositif :
– Tous les frottements sont négligés.
– Le choc est supposé tel que $P_2$ transmet à $P_1$ toute l'énergie cinétique qu'il possède à la date du choc.
– Le ressort exerce une force élastique proportionnelle à sa déformation.

1. **Étude du mouvement du palet $P_2$**
   Un joueur comprime le ressort : la nouvelle position du centre d'inertie $G_2$ du palet $P_2$, devient $G_1$, telle que $OG_1 = \frac{\ell_0}{4}$. Puis ce même joueur le lâche, à un instant pris comme origine des dates, de manière à ne pas communiquer de vitesse initiale à $P_2$.
   (a) Établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie $G_2$.
   (b) On oriente l'axe $x'x$ comme indiqué sur le schéma. On choisit comme origine sur cet axe, non pas le point $O$, mais la position $G_0$.
   L'équation du mouvement de $G_2$ est $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ où $x$ est l'abscisse de $G_2$.
      i. Quelle est la nature du mouvement de $G_2$ ?
      ii. Préciser la signification des symboles $A$, $\omega_0$ et $\varphi$.
      iii. Établir l'expression littérale de $\omega_0$.
      iv. Donner l'expression de la période propre $T_0$.
      v. Calculer les valeurs de $\omega_0$ e $T_0$.
      vi. Déterminer les valeurs des constantes $A$ et $\varphi$.
      vii. En déduire, littéralement, puis numériquement, l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de $G_2$.
   (c) i. Donner l'expression littérale de la vitesse $v(t)$ de $G_2$.
      ii. À quel instant $t_0$ le centre d'inertie $G_2$ passe-t-il en $G_0$ ?
      iii. Déterminer la valeur de la vitesse lors du passage en $G_0$.
   (d) i. Exprimer l'énergie mécanique du système palet et ressort à un instant $t$ quelconque.
      ii. Que vaut cette énergie à l'instant $t_0$ ?
      iii. En déduire la vitesse $v_0$ de $G_2$ à la date $t_0$. Cette valeur est-elle en accord avec celle trouvée à la question 1(c)iii ?
2. **Étude du mouvement du palet $P_1$.**
   Le choc entre les palets $P_2$ et $P_1$ a lieu lorsque $G_2$ passe en $G_0$.
   (a) Calculer la vitesse $v_1$ acquise par le centre d'inertie $G_1$ du palet $P_1$ au moment du choc.
   (b) En déduire la vitesse $v_A$ de $G_1$ au passage en $A$.
   (c) On prévoit que le palet $P_1$ va aborder la rampe avec la vitesse $v_2 = 3,6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vérifier que cette valeur est bien accord avec les hypothèses formulées au départ.
   (d) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de la vitesse $v_B$ de $G_1$ au sommet de la rampe en supposant que le changement de direction en $A$ ne change pas la valeur de la vitesse $v_A$ et que le point $B$ est situé à une hauteur $h_B = 25$ cm au-dessus du plan horizontal du point $A$.
   (e) Quelle doit être la longueur $L$ de la rampe ?
   (f) Déterminer l'équation de la trajectoire du centre d'inertie $G_1$ au-delà du point $B$. Le repère $O'xz$ est imposé (voir schéma).

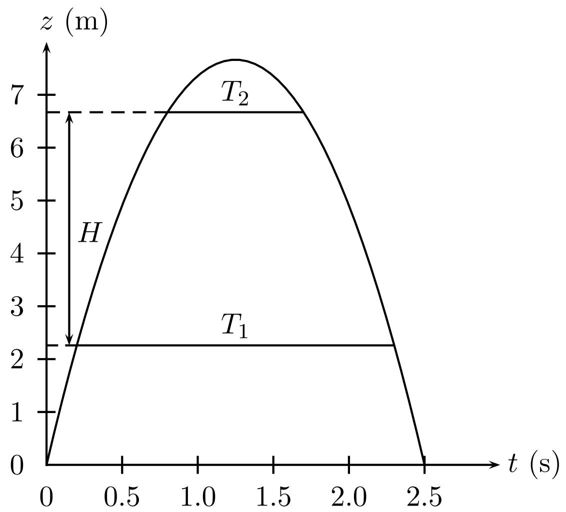
(g) Déterminer l'expression littérale, puis numérique, de la vitesse du palet $P_1$ retombant sur le sol.

(h) À quelle distance du point $O'$ faut-il percer le trou $T$ ? (seule l'expression numérique est demandée).

*Données :*
$m_1 = 50$ g , $m_2 = 200$ g , $k = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ , $\ell_0 = 24$ cm , $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ , $\alpha = 30°$.
*Aide aux calculs :*
$\pi^2 = 10$ ; $\sin 30° = 0,5$ ; $\cos 30° = 0,87$ ; $\tan 30° = 0,58$ ; $3,6^2 = 13$ ; $1,4^2 = 2$ ; $18^2 = 324$ ; $8 \times 0,87 = 7$ ; $48 \times 0,87^2 = 3$.

## 72 Mesure du champ de pesanteur

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au sol, on étudie le mouvement dans le vide d'un point matériel $M$ de mase $m$. L'axe $(O, \vec{k})$ est vertical orienté vers le haut.
À $t = 0$, $M$ est lancé à partir du point $O$ verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{k}$.
Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{k}$ est uniforme.
On note $z$ son altitude à l'instant $t$, il atteint l'altitude maximale $z_M$ à l'instant $t_M$.
Le but de l'expérience est la détermination précise de $g$.




1. Établir les expressions :
   (a) de sa vitesse $v = \dot{z}$ en fonction de $g$, $v_0$ et $t$.
   (b) de son altitude $z$ en fonction de $g$, $v_0$ et $t$.
2. Quelle est la vitesse à l'instant $t_M$ ? En déduire la relation entre $g$, $v_0$ et $t_M$.
3. (a) Établir la relation entre $(z_M - z)$, $(t - t_M)$ et $g$.
   (b) Exprimer la durée $T$ qui sépare les dates de passage du mobile à une même altitude $z$ en fonction de $z$, $z_M$ et $g$.
4. (a) On mesure les durées $T_1$ et $T_2$ entre les passages à deux « stations » d'altitudes $z_1$ et $z_2$ telles que $(z_2 - z_1) = H$. Exprimer $g$ en fonction de $T_1$, $T_2$ et $H$.
   (b) On donne $T_1 = 2,100$ s ; $T_2 = 0,900$ s ; $H = 4,415$ m.
   Calculer $g$.